

H a n d b u c h
der
rechnenden Astronomie

von
Christian Friedrich Rüdiger

Professor und astronomischer Observator zu Leipzig, der
ökonomischen Societät daselbst Ehrenmitglied, auch der
Königl. Großbritannischen Gesellschaft der Wissenschaften
zu Göttingen Correspondent

Z w e y t e r B a n d

mit zwey Kupfern

Z w e y t e A u s g a b e

L e i p z i g
in Joachims Buchhandlung

1 8 0 2

U a n d u n g

Lehrbuch der Arithmetik

von

Christian Friedrich Mündler

Professor und ordentliches Mitglied der
Akademie der Wissenschaften, auch der
Königl. Preussischen Gesellschaft der Wissenschaften
in Göttingen

Erster Band

mit zwei Tafeln

Neu herausgegeben

Leipzig

Verlag von C. F. Winter

1853

PRAKTISCHE ANWEISUNG
ZUR
BERECHNUNG
EBENER
UND
SPHÄRISCHER DREIECKE

DURCH
AUFGABEN AUS DER ASTRONOMIE
ERLÄUTERT

VON
CHRISTIAN FRIEDRICH RÜDIGER

PROFESSOR UND ASTRONOM. OBSERVATOR
ZU LEIPZIG, DER ÖKONOMISCH. SOCIETÄT
DASELBST EHRENMITGLIED, AUCH DER
KÖN. GROSBRITANNISCHEN GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN
CORRESPONDENT

MIT ZWEY KUPFERN

ZWEYTE AUSGABE

LEIPZIG
IN JOACHIMS BUCHHANDLUNG
1802

PRÄKTIISCHE ANWEISUNG
ZUR
BERECHNUNG
DER
SPEZIELLER DREIECKE
UND

DURCH
AUSGABEN AUS DER ASTRONOMIE
ERLÄUTERT

VON
CHRISTIAN FRIEDRICH MÜLLER
PROFESSOR UND ASTROLOG. OBSERVATOR
ZU LEBZIG, DER ÖKONOMISCH. SOCIETÄT
DARINSTE BEZUGNOMMEN. VON DER
KÖNIGLICHEN UNIVERSITÄT GEBILDET
DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN
KONFERENT

MIT ZWEY KUPFERN

ZWEYTE AUSGABE

LEIPZIG
IN JOACHIMS BUCHHANDLUNG
1802.

V o r r e d e.

Auch in diesem zweyten Bande meines Handbuchs der rechnenden Astronomie liefere ich einen Auszug aus Vorlesungen, die ich auf hiesiger Universität über die Trigonometrie und Astronomie zu verschiedenen mahlen gehalten. Ich habe, wie ich mir schmeichle, die besten und bequemsten Auflösungen sämmtlicher Aufgaben der ebenen und sphärischen Trigonometrie, wohl ziemlich alle mitgetheilt, zum Grunde die schätzbaren Werke eines Kästner und

Cagnoli gelegt, und durch sorgfältig ausgewählte
Beyspiele den vorzugsweise gebrauchten analytischen
Vortrag, auf das deutlichste zu erläutern mich
bemüht. Für diese geringe Arbeit wird der Beyfall
Mathematikverständiger und etwas zur Verbreitung
des mathematischen, vornehmlich aber des astro-
nomischen Studiums beygetragen zu haben, meine
größte Belohnung seyn.

Leipzig den 4ten August
1799.

Christian Friedrich Rüdiger.

I N N H A L T.

Aufgaben der ebenen Trigonometrie.

1.

Vier und zwanzig Fälle welche bey Auflösung rechtwinklischer geradlinichter Dreiecke vorkommen können. Seite 1.

2.

Tafel für die Auflösung gleichschenklichter geradlinichter Dreiecke. S. 15.

3.

Auflösung schiefwinklichter geradlinichter Dreiecke. S. 19.

4.

Formeln zur Berechnung des Inhalts geradlinichter Dreiecke. S. 41.

Aufgaben der sphärischen Trigonometrie.

5.

Formeln zur Auflösung rechtwinklichter Kugeldreiecke. S. 49.

6.

Allgemeine Regel für die Auflösung derjenigen schiefwinklischen Kugeldreiecke, wo eine Seite 90° ist. S. 66.

7.

Auflösung gleichschenklichter Kugeldreiecke. S. 67.

8.

Auflösung schiefwinklichter Kugeldreiecke. Seite 73.

9.

Flächeninnhalt eines Kugeldreiecks. S. 91.

Anwendung der vorhergehenden trigonometrischen Formeln auf Astronomie.

10.

Rechtwinklichtes Kugeldreieck, dessen Seiten Länge, Abweichung und gerade Aufsteigung der Sonne sind. S. 95.

11.

Zwey Aufgaben den halben Tagebogen der Sonne oder eines Sterns zu finden. S. 102.

12.

Sechzig mögliche Fälle nebst ihren Auflösungen im schiefwinklichten Kugeldreieck, dessen Seiten die Complementary der nördlichen Polhöhe, der Abweichung und der Höhe eines Sterns, und in dessen Winkeln Supplement des Azimuths, der Stundenwinkel, und parallaktischer Winkel dieses Sterns sind. S. 121.

13.

Einige Erläuterungen und Beyspiele zu diesen 60 Fällen. S. 143.

14.

Methoden die Länge und Breite eines Sterns aus der geraden Aufsteigung und Abweichung desselben, und umgekehrt zu berechnen. S. 171.

15.

Beyspiele hiezu. S. 188.

Vier und zwanzig Fälle

welche bey

Auflösung rechtwinklischer

geradlinichter Dreiecke

vorkommen können.

*Man sehe Tafel I.
Fig. I.*

$A = 90^\circ$; B und C spitzig.
 $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$.
Die beyden Perpendikel. Die Hypotenuse.

Erster Fall.

Gegeben. <i>c</i>, <i>B</i> d. i. ein Perpendikel und der anliegende Winkel.		Gesucht. <i>b</i> oder das andere Per- pendikel.
--	--	--

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = c \cdot \text{Tang } B$$

$$\log b = \log c + \log \text{Tang } B - 10$$

Beyspiel.

<i>c</i> = 64 Ruthen;	<i>B</i> = 36° 52' 0"
log <i>c</i>	= 1,8061800
+ log Tang <i>B</i> — 10	= 9,8750102 — 10
log <i>b</i>	= 1,6811902
<i>b</i>	= 47,994 Ruthen.

Zweyter Fall.

Gegeben. <i>c</i>, <i>B</i> d. i. ein Perpendikel und der anliegende Winkel.		Gesucht. <i>a</i> oder die Hypotenuse.
--	--	---

Formel und logarithmische Gleichung.

$$a = \frac{c}{\text{Cosin } B}$$

$$\log a = 10 + \log c - \log \text{Cosin } B$$

Dritter Fall.

Gegeben. <i>c</i>, <i>C</i> d. i. ein Perpendikel u. der gegenüberstehende Winkel.		Gesucht. <i>b</i> oder das andere Per- pendikel.
--	--	--

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = c \cdot \text{Cotang } C$$

$$\log b = \log c + \log \text{Cotang } C - 10$$

*Vierter Fall.**Gegeben.*

c, C d. i. ein Perpendikel
und der gegenüberstehende
Winkel.

Gesucht.

a oder die Hypotenuse.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$a = \frac{c}{\sin C}$$

$$\log a = 10 + \log c - \log \sin C$$

*Fünfter Fall.**Gegeben.*

a, B d. i. die Hypotenuse
und ein spitziger Winkel.

Gesucht.

c oder das dem gegebe-
nen Winkel anliegende
Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$c = a \cdot \cos B$$

$$\log c = \log a + \log \cos B - 10$$

*Sechster Fall.**Gegeben.*

a, B d. i. die Hypotenuse
und ein spitziger Winkel.

Gesucht.

b oder das dem gegebe-
nen Winkel gegenüber-
stehende Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = a \cdot \sin B$$

$$\log b = \log a + \log \sin B - 10$$

*Gegeben.*c, a oder ein Perpendikel
und die Hypotenuse.*Gesucht.*B oder der dem gegebene
Perpendikel anliegende Winkel.*Formel und logarithmische Gleichung.*

$$1) \cos B = \frac{c}{a}$$

$$\log \cos B = 10 + \log c - \log a.$$

Wenn B ein kleiner Winkel ist:

$$2) \sin \frac{1}{2} B = r \frac{a-c}{2a}$$

$$\log \sin \frac{1}{2} B = \frac{20 + \log(a-c) - \log 2 - \log a}{2}$$

$$\text{oder: } 3) \tan \frac{1}{2} B = r \frac{a-c}{a+c}$$

$$\log \tan \frac{1}{2} B = \frac{20 + \log(a-c) - \log(a+c)}{2}$$

Beispiel.

$$c = 64 \text{ Ruthen; } a = 79,997 \text{ R.}$$

Rechnung nach Formel 1.

$$10 + \log c = 11,8061800$$

$$- \log a = 1,9030716$$

$$\log \cos B = 9,9031084$$

$$B = 36^\circ 52' 0''$$

Rechnung nach Formel 2.

$$\begin{array}{rcl}
20 + \log (a-c) & = & 21,2040385 \\
- \log 2 & = & 0,3010300 \\
\hline
\text{Rest 1} & = & 20,9030085 \\
- \log a & = & 1,9030716 \\
\hline
\text{Rest 2} & = & 18,9999369 \\
\text{Hälfte} = \log \sin \frac{1}{2} B & = & 9,4999684 \\
\frac{1}{2} B & = & 18^\circ 26' 0'' \\
B & = & 36. 52. 0.
\end{array}$$

Rechnung nach Formel 3.

$$\begin{array}{rcl}
20 + \log (a-c) & = & 21,2040385 \\
- \log (a+c) & = & 2,1583534 \\
\hline
\text{Rest} & = & 19,0456851 \\
\text{Hälfte} = \log \tan \frac{1}{2} B & = & 9,5228425 \\
\frac{1}{2} B & = & 18^\circ 26' 0'' \\
B & = & 36. 52. 0.
\end{array}$$

Achter Fall.

<i>Gegeben.</i>	<i>Gesucht.</i>
c, a oder ein Perpendikel und die Hypotenuse.	C oder der dem gegebe- nen Perpendikel gegen- überstehende Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$1) \sin C = \frac{c}{a}$$

$$\log \sin C = 10 + \log c - \log a$$

Wenn der Winkel C groß ist:

$$2) \sin \left(45^\circ - \frac{1}{2} C \right) = r \frac{\overbrace{a-c}}{2a}$$

$$\log \sin \left(45^\circ - \frac{1}{2} C \right) = \frac{20 + \log (a-c) - \log 2 - \log a}{2}$$

oder: $3) \text{Tang } (45^\circ - \frac{1}{2} C) = r \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$

$$\log \text{Tang } (45^\circ - \frac{1}{2} C) = \frac{20 + \log(a-c) - \log(a+c)}{2}$$

Neunter Fall.

<i>Gegeben.</i>	<i>Gesucht.</i>
c, a oder ein Perpendikel und die Hypotenuse.	b oder das andere Per- pendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$1) b = r \sqrt{(a-c)(a+c)}$$

$$\log b = \frac{\log(a-c) + \log(a+c)}{2}$$

Oder auch:

$$2) \text{Cosin } x = \frac{c}{a}$$

$$b = a \cdot \text{Sin } x;$$

$$\log \text{Cosin } x = 10 + \log c - \log a$$

$$\log b = \log a + \log \text{Sin } x - 10.$$

Zehnter Fall.

<i>Gegeben.</i>	<i>Gesucht.</i>
c, b oder die beyden Per- pendikel.	C oder der dem Perpen- dikel c gegenüberstehen- de Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Cotang } C = \frac{b}{c}$$

$$\log \text{Cotang } C = 10 + \log b - \log c$$

Elfter Fall.

Gegeben.
c, b oder die beyden Per-
pendikel.

Gesucht.
 B oder der dem Perpen-
 dikel b gegenüberstehen-
 de Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Tang } B = \frac{b}{c}$$

$$\log \text{Tang } B = 10 + \log b - \log c.$$

Zwölfter Fall.

Gegeben.
 c, b d. i. die beyden Per-
 pendikel.

Gesucht.
 a oder die Hypotenuse.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$1) a = c \cdot r \left(1 + \frac{b^2}{c^2} \right)$$

$$\log a = \log c + \frac{\log \left(1 + \frac{b^2}{c^2} \right)}{2}$$

Oder auch :

$$2) \text{Tang } x = \frac{b}{c};$$

$$a = \frac{c}{\text{Cosin } x}.$$

$$\log \text{Tang } x = 10 + \log b - \log c$$

$$\log a = 10 + \log c - \log \text{Cosin } x$$

Beyspiel.

$$c = 64 \text{ Ruthen}; \quad b = 47,994 \text{ R.}$$

Rechnung nach Formel 1.

$$b^2 = 2303,42$$

$$c^2 = 4096$$

$$\log b^2 = 3,362\,3732$$

$$\log c^2 = 3,612\,3599$$

$$\log b^2 - \log c^2 = \log \frac{b^2}{c^2} = 9,750\,0133 - 10$$

$$\frac{b^2}{c^2} = 0,562\,36$$

$$1 = 1,000\,00$$

$$1 + \frac{b^2}{c^2} = 1,562\,36$$

$$\log \left(1 + \frac{b^2}{c^2} \right) = 0,193\,7811$$

$$\text{Hälfte} = 0,096\,8905$$

$$+ \log c = 1,806\,1800$$

$$\log a = 1,903\,0705$$

$$a = 79,9964 \text{ R.}$$

Rechnung nach Formel 2.

$$10 + \log b = 11,681\,1902$$

$$- \log c = 1,806\,1800$$

$$\log \text{Tang } x = 9,875\,0102$$

$$x = 36^\circ 52' 0''$$

$$10 + \log c = 11,806\,1800$$

$$- \log \text{Cos } x = 9,903\,1084$$

$$\log a = 1,903\,0716$$

$$a = 79,9966 \text{ R.}$$

Dreyzehnter Fall.

Gegeben.

$a - c$ und B d. i. die Differenz der Hypotenuse und eines Perpendikels, nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.

Gesucht.

b d. i. das dem gegebenen Winkel gegenüberstehende Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = (a - c) \cdot \text{Cotang } \frac{1}{2} B$$

$$\log b = \log (a - c) + \log \text{Cotang } \frac{1}{2} B - 10$$

Vierzehnter Fall.

Gegeben.

$a - c$ und C d. i. die Differenz der Hypotenuse und eines Perpendikels, nebst dem letzterm gegenüberstehenden Winkel.

Gesucht.

b d. i. das dem gegebenen Winkel anliegende Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = (a - c) \cdot \text{Cotang } (45^\circ - \frac{1}{2} C)$$

$$\log b = \log (a - c) + \log \text{Cotang } (45^\circ - \frac{1}{2} C) - 10$$

Fünfzehnter Fall.

Gegeben.

$a + c$ und B d. i. die Summe der Hypotenuse und eines Perpendikels, nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.

Gesucht.

b d. i. das dem gegebenen Winkel gegenüberstehende Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = (a + c) \cdot \text{Tang } \frac{1}{2} B$$

$$\log b = \log (a + c) + \log \text{Tang } \frac{1}{2} B - 10$$

Sechzehnter Fall.

Gegeben.

$a+c$ und C d. i. die Summe der Hypotenuse und eines Perpendikels, nebst dem letzterem gegenüberstehenden Winkel.

Gesucht.

b d. i. das dem gegebenen Winkel anliegende Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = (a+c) \cdot \text{Tang} (45^\circ - \frac{1}{2} C)$$

$$\log b = \log (a+c) + \log \text{Tang} (45^\circ - \frac{1}{2} C) - 10$$

Siebzehnter Fall.

Gegeben.

$c-b$ und B d. i. der Unterschied der beyden Perpendikel und ein Winkel $< 45^\circ$.

Gesucht.

$c+b$ d. i. die Summe der beyden Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$c+b = (c-b) \cdot \text{Cotang} (45^\circ - B)$$

$$\log (c+b) = \log (c-b) + \log \text{Cotang} (45^\circ - B) - 10$$

Achtzehnter Fall.

Gegeben.

$b-c$ und B d. i. der Unterschied der beyden Perpendikel und ein Winkel $> 45^\circ$.

Gesucht.

$b+c$ d. i. die Summe der beyden Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b+c = (b-c) \cdot \text{Cotang} (B - 45^\circ)$$

$$\log (b+c) = \log (b-c) + \log \text{Cotang} (B - 45^\circ) - 10$$

Neunzehnter Fall.

Gegeben.	Gesucht.
$c+b$ und B d. i. die Summe der beyden Perpendikel und ein Winkel $< 45^\circ$.	$c-b$ d. i. der Unterschied der beyden Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$c-b = (c+b) \cdot \text{Tang } (45^\circ - B)$$

$$\log (c-b) = \log (c+b) + \log \text{Tang } (45^\circ - B) - 10$$

Zwanzigster Fall.

Gegeben.	Gesucht.
$b+c$ und B d. i. die Summe der beyden Perpendikel und ein Winkel $> 45^\circ$.	$b-c$ d. i. der Unterschied der beyden Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b-c = (b+c) \cdot \text{Tang } (B - 45^\circ)$$

$$\log (b-c) = \log (b+c) + \log \text{Tang } (B - 45^\circ) - 10$$

Ein und zwanzigster Fall.

Gegeben.	Gesucht.
$c-b$ und a d. i. der Unterschied der beyden Perpendikel, nebst der Hypotenuse.	B und C d. i. die beyden spitzen Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\sin (45^\circ - B) = \frac{c-b}{a \cdot r_2}$$

$$C = 90^\circ - B$$

$$\log \sin (45^\circ - B) = 10 + \log (c-b) - \log a - \frac{\log 2}{2}$$

Zwey und zwanzigster Fall.

Gegeben.

$c+b$ und a d. i. die Summe
der beyden Perpendikel,
nebst der Hypotenuse.

Gesucht.

B und C d. i. die beyden
spitzigen Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$1) \text{ Cosin } (45^\circ - B) = \frac{c+b}{a \cdot r_2}$$

$$C = 90^\circ - B.$$

$$\log \text{ Cosin } (45^\circ - B) = 10 + \log (c+b) - \log a - \frac{\log 2}{2}$$

Wenn B nahe an 45° beträgt:

$$2) \text{ Sin } (45^\circ - B) = r \frac{2 \cdot a^2 - (c+b)^2}{2 \cdot a^2}$$

$$C = 90^\circ - B.$$

$$\log \text{ Sin } (45^\circ - B) = \frac{20 + \log (2a^2 - (c+b)^2) - \log 2 - 2 \log a}{2}$$

Beyspiel.

$$c+b = 111,994 \text{ Ruthen; } a = 79,997 \text{ R.}$$

Rechnung nach Formel 1.

$$10 + \log (c+b) = 12,0491948$$

$$- \log a = 1,9030716$$

$$\text{Rest} = 10,1461232$$

$$- \frac{\log 2}{2} = 0,1505150$$

$$\log \text{ Cos } (45^\circ - B) = 9,9956082$$

$$45^\circ - B = 8^\circ 8' 4''$$

$$45^\circ = 44. 59. 60.$$

$$B = 36. 51. 56.$$

$$90^\circ = 89. 59. 60.$$

$$C = 53. 8. 4.$$

Rechnung nach Formel 2.

$$\begin{array}{rcl}
 a^2 & = & 6399,520009 \\
 2a^2 & = & 12799,040018 \\
 (c+b)^2 & = & 12542,656036 \\
 \hline
 2a^2 - (c+b)^2 & = & 256,383982 \\
 20 + \log 256,384 & = & 22,4088909 \\
 - \log 2 & = & 0,3010300 \\
 \hline
 \text{Rest 1} & = & 22,1078609 \\
 - 2. \log a & = & 3,8061432 \\
 \hline
 \text{Rest 2} & = & 18,3017177 \\
 \text{Hälfte} = \log \sin (45^\circ - B) & = & 9,1508588 \\
 45^\circ - B & = & 8^\circ 8' 12'' \\
 45^\circ & = & 44. 59. 60. \\
 \hline
 B & = & 36. 51. 48. \\
 90^\circ & = & 89. 59. 60. \\
 \hline
 C & = & 53. 8. 12.
 \end{array}$$

*Drey und zwanzigster Fall.**Gegeben.*

$a+c$ und b d. i. die Summe der Hypotenuse und eines Perpendikels, nebst dem andern Perpendikel.

Gesucht.

B und C oder die beyden spitzen Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\begin{aligned}
 \text{Tang } \frac{1}{2} B &= \frac{b}{a+c} \\
 C &= 90^\circ - B \\
 \log \text{Tang } \frac{1}{2} B &= 10 + \log b - \log (a+c)
 \end{aligned}$$

*Vier und zwanzigster Fall.**Gegeben.*

$a-c$ und b d. i. die Differenz der Hypotenuse und eines Perpendikels, nebst dem andern Perpendikel.

Gesucht.

B und C d. i. die beyden spitzen Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\begin{aligned}
 \text{Tang } \frac{1}{2} B &= \frac{a-c}{b} \\
 C &= 90^\circ - B \\
 \log \text{Tang } \frac{1}{2} B &= 10 + \log (a-c) - \log b
 \end{aligned}$$

T a f e l
f ü r d i e A u f l ö s u n g
gleichschenkliger
geradliniger Dreiecke.

Man sehe Tafel I.

Fig. II.

$$a=c$$

$$A=C$$

$$A = 90^\circ - \frac{1}{2} B;$$

$$B = 180^\circ - 2 A.$$

F a l l 1.

Gegeben.

a, b d. i. Schenkel und Grundlinie.

Gesucht.

A d. i. Winkel an der Grundlinie.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Cosin } A = \frac{b}{2a}$$

$$\log \text{Cosin } A = 10 + \log b - \log 2 - \log a$$

F a l l 2.

Gegeben.

a, b d. i. Schenkel und Grundlinie.

Gesucht.

B d. i. Winkel an der Spitze.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Sin } \frac{1}{2} B = \frac{b}{2a}$$

$$\log \text{Sin } \frac{1}{2} B = 10 + \log b - \log 2 - \log a$$

F a l l 3.

Gegeben.

a, A d. i. Schenkel und Winkel an der Grundlinie.

Gesucht.

b d. i. Grundlinie.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = 2a \cdot \text{Cosin } A$$

$$\log b = \log 2 + \log a + \log \text{Cosin } A - 10$$

F a l l 4.

Gegeben.
a, B d. i. Schenkel und
 Winkel an der Spitze.

Gesucht.
b d. i. Grundlinie.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = 2 a \cdot \sin \frac{1}{2} B$$

$$\log b = \log 2 + \log a + \log \sin \frac{1}{2} B - 10$$

F a l l 5.

Gegeben.
b, A d. i. Grundlinie und
 Winkel an der Grundlinie.

Gesucht.
a d. i. Schenkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$a = \frac{b}{2 \cos A}$$

$$\log a = 10 + \log b - \log 2 - \log \cos A$$

F a l l 6.

Gegeben.
b, B d. i. Grundlinie und
 Winkel an der Spitze.

Gesucht.
a d. i. Schenkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$a = \frac{b}{2 \sin \frac{1}{2} B}$$

$$\log a = 10 + \log b - \log 2 - \log \sin \frac{1}{2} B$$

A u f l ö s u n g

schiefwinklicher

geradlinichter Dreiecke.

*Man sehe Tafel I.
Fig. III.*

$$AB = c; \quad AC = b; \quad BC = a.$$

*F a l l 1.**Gegeben.*A, B, C, a d. i. die Winkel
und eine Seite.*Gesucht.*b, c d. i. die beyden
übrigen Seiten.*Formel und logarithmische Gleichung.*

$$b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A};$$

$$c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$$

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$$

*F a l l 2.**Gegeben.*a, b, A, d. i. zwey Seiten
und ein gegenüberstehen-
der Winkel.*Gesucht.*B, C d. i. die beyden übr-
igen Winkel.*Formel und logarithmische Gleichung.*

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a};$$

$$C = 180^\circ - A - B$$

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a.$$

B ist $< 90^\circ$ wenn $b < a$; da hebt sich also die
Zweydeutigkeit.

Ist $b > a$, so entscheidet die Trigonometrie
über die Beschaffenheit von B nichts.

F a l l 3.*Gegeben.*

a, b, A d. i. zwey Seiten
u. ein gegenüberstehender
Winkel.

Gesucht.

c d. i. die dritte Seite.

Erste Auflösungsart.

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}; \quad c = \frac{a \cdot \sin (A+B)}{\sin A}$$

Wenn $b \leq a$, so ist $B \leq 90^\circ$ oder spitzig.

Wenn aber $b > a$ ist, so entscheidet die Trigonometrie über die Beschaffenheit von B nichts, und es ist B entweder spitzig oder stumpf, alsdann bekommt auch c zweyerley Werthe.

Zweyte Auflösungsart.

$$\text{I. } c = b \cdot \cos A + \sqrt{(a+b \cdot \sin A)(a-b \cdot \sin A)}$$

Für A, B spitzig, und für A stumpf, B spitzig.

$$\text{II. } c = b \cdot \cos A - \sqrt{(a+b \cdot \sin A)(a-b \cdot \sin A)}$$

Für A spitzig, B stumpf.

Es gilt wenn $a > b$ ist, allezeit die Formel I, und da giebt es keine Unbestimmtheit für c ; ist A ein stumpfer Winkel, so wird das Glied $b \cdot \cos A$ negativ.

Wenn aber $a \leq b$, so ist auch $A \leq B$, folglich kann, indem A spitzig ist, der Winkel B entweder spitzig oder stumpf seyn, und es giebt eine Zweydeutigkeit für c , die sich durch die Trigonometrie allein nicht ausmachen läßt.

Beyspiel.

$$a = 104 \text{ R.} \quad \angle b = 142 \text{ R.}; \quad A = 44^{\circ} 13' 2'';$$

Rechnung nach der 1sten Auflösungsart.

$$\begin{array}{rcl}
 \log b & = & 2,1522883 \\
 + \log \sin A & = & 9,8434698 \\
 \hline
 \text{Summe} & = & 11,9957581 \\
 - \log a & = & 2,0170333 \\
 \hline
 \log \sin B & = & 9,9787248 \\
 B \text{ spitzig} & = & 72^{\circ} 12' 43'' \\
 180^{\circ} & = & 179. 59. 60. \\
 \hline
 B \text{ stumpf} & = & 107. 47. 17. \\
 A & = & 44. 13. 2. \\
 \hline
 A + B \text{ stumpf} & = & 152. 0. 19. \\
 \log a & = & 2,0170333 \\
 + \log \sin (A + B \text{ stu.}) & = & 9,6715340 \\
 \hline
 \text{Summe} & = & 11,6885673 \\
 - \log \sin A & = & 9,8434698 \\
 \hline
 \log c & = & 1,8450975 \\
 c & = & 70,000 \text{ Ruthen. } \textit{Zweyter} \\
 & & \textit{Werth für c.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 A & = & 44^{\circ} 13' 2'' \\
 B \text{ spitzig} & = & 72. 12. 43. \\
 \hline
 A + B \text{ spitzig} & = & 116. 25. 45. \\
 \log a & = & 2,0170333 \\
 + \log \sin (A + B \text{ sp.}) & = & 9,9520585 \\
 \hline
 \text{Summe} & = & 11,9690918 \\
 - \log \sin A & = & 9,8434698 \\
 \hline
 \log c & = & 2,1256220 \\
 c & = & 133,543 \text{ Ruthen. } \textit{Erster} \\
 & & \textit{Werth für c.}
 \end{array}$$

Rechnung nach der 2ten Auflösungsart.

$$\begin{aligned}
 & \log b = 2,152\,2883 \\
 & + \log \frac{\sin A}{\sin \text{tot}} = 9,843\,4698 - 10 \\
 \hline
 & \log 99,028 = 1,995\,7581 \\
 & b \cdot \sin A = 99,028 \\
 & a = 104,000 \\
 \hline
 & a + b \sin A = 203,028 \\
 & a - b \sin A = 4,972 \\
 & \log (a + b \sin A) = 2,307\,5559 \\
 & + \log (a - b \sin A) = 0,696\,5311 \\
 \hline
 & \text{Summe} = 3,004\,0870 \\
 & \text{Hälfte} = \log 31,772 = 1,502\,0435 \\
 & r(a + b \sin A)(a - b \sin A) = 31,772 \text{ R.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \log b = 2,152\,2883 \\
 & + \log \frac{\cos A}{\sin \text{tot}} = 9,855\,3380 - 10 \\
 \hline
 & \log 101,772 = 2,007\,6263 \\
 & b \cdot \cos A = 101,772 \text{ R.} \\
 & r(a + b \sin A)(a - b \sin A) = 31,772 \\
 \hline
 & \text{Summe} = c = 133,544. \text{ Erster Werth für } c. \\
 & \text{Unterschied} = c = 70,000. \text{ Zweyter Werth für } c.
 \end{aligned}$$

F a l l 4.

Gegeben.
 $a, b, a > b, C$ d. i. zwey
 Seiten und der eingeschlof-
 fene Winkel.

Gesucht.
 c d. i. die dritte Seite.

Erste Auflösung und logarithmische Gleichung.

$$\text{Tang } x = \frac{2 \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} C \cdot r(a, b)}{a - b};$$

$$c = \frac{a - b}{\text{Cosin } x}$$

$$\log \text{Tang } x = \frac{\log a + \log b}{2} + \log 2 + \log \text{Sin } \frac{1}{2} C - \log (a - b);$$

$$\log c = 10 + \log (a - b) - \log \text{Cosin } x$$

Zweyte Auflösung.

$$1) c = r(a^2 + b^2 - 2ab \text{Cosin } C) \quad \text{Für } C < 90^\circ$$

$$2) c = r(a^2 + b^2 + 2ab \text{Sin}(C - 90^\circ)) \quad \text{Für } C > 90^\circ$$

Beyspiel.

$$a = 142 \text{ R.}; \quad b = 104 \text{ R.}; \quad C = 27^\circ 59' 41''.$$

Rechnung nach der ersten Auflösung.

log a =	2,152 2883
+ log b =	2,017 0333
Summe =	4,169 3216
Hälfte =	2,084 6608
+ log 2 =	0,301 0300
+ log Sin $\frac{1}{2} C$ =	9,383 5949
Summe =	11,769 2857
— log (a — b) =	1,579 7836
log Tang x =	10,189 5021
x =	57° 7' 18"
10 + log (a — b) =	11,579 7836
— log Cosin x =	9,734 6854
log c =	1,845 0982
c =	70,000 R.

Rechnung nach der zweyten Auflösung.

$\log 2 =$	0,3010300
$+ \log a =$	2,1522883
$+ \log b =$	2,0170333
$+ \log \frac{\text{Cosin } C}{\text{Sin tot}} =$	9,9459562 — 10
Summe $= \log 26080 =$	4,4163078
$2 ab \text{ Cosin } C =$	26080
$a^2 =$	20164
$b^2 =$	10816
$a^2 + b^2 =$	30980
$- 2 ab \text{ Cosin } C =$	26080
$a^2 + b^2 - 2 ab \text{ Cosin } C =$	4900
$c =$	70 R.

F a l l 5.

Gegeben.
 $a, b, a > b, C$, d. i. zwey
 Seiten und der eingeschlof-
 fene Winkel.

Gesucht.
 A, B d. i. die beyden
 übrigen Winkel.

Erste Auflösungsart.

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\text{Cut } \frac{1}{2} C \cdot (a - b)}{a + b};$$

$$\frac{1}{2} (A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2} C;$$

$$\frac{1}{2} (A + B) + \frac{1}{2} (A - B) = A;$$

$$\frac{1}{2} (A + B) - \frac{1}{2} (A - B) = B.$$

Zweyte Auflösungsart.

$$\text{Tang } x = \frac{b}{a};$$

$$\text{Cotang } \frac{1}{2} (A - B) = \text{Tang } \frac{1}{2} C \cdot \text{Tang } (45^\circ + x);$$

$$\frac{1}{2} (A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2} C;$$

$$\frac{1}{2} (A + B) + \frac{1}{2} (A - B) = A;$$

$$\frac{1}{2} (A + B) - \frac{1}{2} (A - B) = B.$$

Dritte Auflösungsart.

$$\text{I. Tang } A = \frac{\text{Tang } C}{\frac{b}{a \cdot \text{Cosin } C} - 1}$$

Wenn $C < 90^\circ$
und $a \cdot \text{Cosin } C < b$.

$$\text{II. Tang } (A - 90^\circ) = \frac{1 - \frac{b}{a \cdot \text{Cosin } C}}{\text{Tang } C}$$

Wenn $C < 90^\circ$
und $a \cdot \text{Cosin } C > b$.

$$\text{III. Tang } A = \frac{\text{Cotang } (C - 90^\circ)}{\frac{b}{a \cdot \text{Sin } (C - 90^\circ)} + 1}$$

Wenn $C > 90^\circ$.

$$\text{IV. } B = 180^\circ - A - C.$$

Beispiel.

$$a = 142 \text{ Ruthen}; \quad b = 104 \text{ R.}; \quad C = 27^\circ 59' 41''.$$

Rechnung nach der 1ten Auflösungsart.

$$\begin{array}{rcl}
 \log \cot \frac{1}{2} C & = & 10,6033141 \\
 + \log (a - b) & = & 1,5797836 \\
 \hline
 \text{Summe} & = & 12,1830977 \\
 - \log (a + b) & = & 2,3909351 \\
 \hline
 \log \tan \frac{1}{2} (A - B) & = & 9,7921626 \\
 \frac{1}{2} (A - B) & = & 31^\circ 47' 7,36'' \\
 90^\circ & = & 89. 59. 60,00 \\
 \frac{1}{2} C & = & 13. 59. 50,50 \\
 \hline
 \frac{1}{2} (A + B) & = & 76. 0. 9,50. \\
 A & = & 107. 47. 17. \\
 B & = & 44. 13. 2.
 \end{array}$$

Rechnung nach der 2ten Auflösungsart.

$$\begin{array}{rcl}
 10 + \log b & = & 12,0170333 \\
 - \log a & = & 2,1522883 \\
 \hline
 \log \tan x & = & 9,8647450 \\
 x & = & 36^\circ 13' 8'' \\
 45^\circ & = & 45. 0. 0. \\
 \hline
 45^\circ + x & = & 81. 13. 8. \\
 \log \tan \frac{1}{2} C & = & 9,3966859 \\
 + \log \frac{\tan (45^\circ + x)}{\sin \text{Tot}} & = & 10,8111541 - 10 \\
 \hline
 \log \cot \frac{1}{2} (A - B) & = & 10,2078400 \\
 \frac{1}{2} (A - B) & = & 31^\circ 47' 7'' \\
 \frac{1}{2} (A + B) & = & 76. 0. 9,5. \\
 \hline
 \text{Summe} = A & = & 107. 47. 17. \\
 \text{Unterschied} = B & = & 44. 13. 2.
 \end{array}$$

Rechnung nach der 3ten Auflösungsart.

$$\log a = 2,1522883$$

$$+ \log \frac{\text{Cosin } C}{\text{Sin tot}} = 9,9459562 - 10$$

$$\log (a \cdot \text{Cosin } C) = 2,0982445$$

$$\log b = 2,0170333$$

} $a \cdot \text{Cosin } C > b$

$$\log \frac{b}{a \cdot \text{Cosin } C} = 9,9187888 - 10$$

$$\frac{b}{a \cdot \text{Cosin } C} = 0,829447$$

$$1 = 1,000000$$

$$1 - \frac{b}{a \cdot \text{Cosin } C} = 0,170553$$

$$20 + \log \left(1 - \frac{b}{a \cdot \text{Cosin } C} \right) = 29,2318594 - 10$$

$$- \log \text{Tang } C = 9,7255778$$

$$\log \text{Tang } (A - 90^\circ) = 9,5062816$$

$$A - 90^\circ = 17^\circ 47' 17''$$

$$A = 107. 47. 17.$$

$$180^\circ = 179. 59. 60.$$

$$180^\circ - A = 72. 12. 43.$$

$$C = 27. 59. 41.$$

$$180^\circ - A - C = B = 44. 13. 2.$$

F a l l 6.

Gegeben. a, b, c d. i. die drey Seiten. | *Gesucht.* A, B, C oder die Winkel.

Formel I. und logarithmische Gleichung.

$$S = \frac{a + b + c}{2};$$

$$\text{Cosin } \frac{1}{2} A = r \left(\frac{S \cdot (S - a)}{b c} \right)$$

$$\log \text{Cosin } \frac{1}{2} A = \frac{20 + \log S + \log (S - a) - \log b - \log c}{2}$$

Formel II. und logarithmische Gleichung.

$$S = \frac{a + b + c}{2};$$

$$\text{Sin } \frac{1}{2} A = r \left(\frac{(S - b)(S - c)}{b c} \right)$$

$$\log \text{Sin } \frac{1}{2} A = \frac{20 + \log (S - b) + \log (S - c) - \log b - \log c}{2}$$

Formel III. und logarithmische Gleichung.

$$Q = r \sqrt{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}$$

$$\text{Sin } A = \frac{Q}{2 b c}$$

$$\log Q = \frac{20 + \log(a + b + c) + \log(b + c - a) + \log(a + c - b) + \log(a + b - c)}{2}$$

$$\log \text{Sin } A = \log Q - \log 2 - \log b - \log c.$$

Formel IV. und logarithmische Gleichung.

$$\text{Cosin } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 b c}$$

$$\log \text{Cosin } A = 10 + \log(b^2 + c^2 - a^2) - \log 2 - \log b - \log c.$$

Formel V. und logarithmische Gleichung.

$$R = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc};$$

$$\text{Cosin } A = R - 1.$$

$$\log R = \log(a+b+c) + \log(b+c-a) - \log 2 - \log b - \log c;$$

$$\log \text{Cosin } A = 10 + \log(R - 1).$$

Beyspiel.

$$a = 142 \text{ Ruthen}; \quad b = 104 \text{ R.}; \quad c = 70 \text{ R.}$$

Rechnung nach Formel I.

$$a = 142 \text{ R.}$$

$$b = 104.$$

$$c = 70.$$

$$a + b + c = 316.$$

$$\text{Hälfte} = S = 158.$$

$$a = 142.$$

$$S - a = 16.$$

$$20 + \log S = 22,1986571$$

$$+ \log(S - a) = 1,2041200$$

$$\text{Summe} = 23,4027771$$

$$- \log b = 2,0170333$$

$$\text{Rest 1} = 21,3857438$$

$$- \log c = 1,8450980$$

$$\text{Rest 2} = 19,5406458$$

$$\text{Hälfte} = \log \text{Cosin } \frac{1}{2} A = 9,7703229$$

$$\frac{1}{2} A = 53^\circ 53' 38,241''$$

$$A = 107. 47. 17''$$

Rechnung nach Formel II.

$$S = 158 \text{ R.}; \quad S = 158 \text{ R.}$$

$$b = 104. \quad c = 70.$$

$$S - b = 54; \quad S - c = 88.$$

$$20 + \log (S - b) = 21,732\,3938$$

$$+ \log (S - c) = 1,944\,4827$$

$$\text{Summe} = 23,676\,8765$$

$$- \log b = 2,017\,0333$$

$$\text{Rest 1} = 21,659\,8432$$

$$- \log c = 1,845\,0980$$

$$\text{Rest 2} = 19,814\,7452$$

$$\text{Hälfte} = \log \sin \frac{1}{2} A = 9,907\,3726$$

$$\frac{1}{2} A = 53^\circ 53' 38,3125''$$

$$A = 107. 47. 17.$$

Rechnung nach Formel III.

$$a + b + c = 316 \text{ R.}$$

$$b + c - a = 32.$$

$$a + c - b = 108.$$

$$a + b - c = 176.$$

$$20 + \log (a + b + c) = 22,499\,6871$$

$$+ \log (b + c - a) = 1,505\,1500$$

$$+ \log (a + c - b) = 2,033\,4238$$

$$+ \log (a + b - c) = 2,245\,5127$$

$$\text{Summe} = 28,283\,7736$$

$$\text{Hälfte} = \log Q = 14,141\,8868$$

$$- \log 2 = 0,301\,0300$$

$$\log Q - \log 2 = 13,840\,8568$$

$$- \log b = 2,017\,0333$$

$$\text{Rest} = 11,823\,8235$$

$$- \log c = 1,845\,0980$$

$$\log \sin A = 9,978\,7255$$

$$A = 107^\circ 47' 17''$$

Rechnung nach Formel IV.

$$\begin{array}{rcl}
 b^2 & = & 10816 \\
 c^2 & = & 4900 \\
 \hline
 b^2 + c^2 & = & 15716 \\
 - a^2 & = & 20164 \\
 \hline
 b^2 + c^2 - a^2 & = & -4448 \\
 10 + \log 4448 & = & 13,6481648 \\
 - \log 2 & = & 0,3010300 \\
 \hline
 \text{Rest 1} & = & 13,3471348 \\
 - \log b & = & 2,0170333 \\
 \hline
 \text{Rest 2} & = & 11,3301015 \\
 - \log c & = & 1,8450980 \\
 \hline
 \log - \text{Cosin } A & = & 9,4850035 \\
 A & = & 107^\circ 47' 17''
 \end{array}$$

Rechnung nach Formel V.

$$\begin{array}{rcl}
 a + b + c & = & 316 \text{ R.} \\
 b + c - a & = & 32. \\
 \log (a + b + c) & = & 2,4996871 \\
 + \log (b + c - a) & = & 1,5051500 \\
 \hline
 \text{Summe} & = & 4,0048371 \\
 - \log 2 & = & 0,3010300 \\
 \hline
 \text{Rest 1} & = & 3,7038071 \\
 - \log b & = & 2,0170333 \\
 \hline
 \text{Rest 2} & = & 1,6867738 \\
 - \log c & = & 1,8450980 \\
 \hline
 \log R & = & 9,8416758 - 10 \\
 R & = & 0,6945055 \\
 1 & = & 1,0000000 \\
 \hline
 R - 1 & = & -0,3054945 \\
 10 + \log 0,305495 & = & 19,4850041 - 10 \\
 \log - \text{Cosin } A & = & 9,4850041 \\
 A & = & 107^\circ 47' 17''
 \end{array}$$

Fall 7.*Gegeben.*

$c, b, C - B; c > b$ d. i.
zwey Seiten und die Differenz der ihnen gegenüberstehenden Winkel.

Gesucht.

A d. i. der von den beyden gegebenen Seiten eingeschlossene Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Tang } \frac{1}{2} A = \frac{(c - b) \cdot \text{Cotang } \frac{1}{2} (C - B)}{c + b}$$

$$\log \text{Tang } \frac{1}{2} A = \log (c - b) + \log \text{Cotang } \frac{1}{2} (C - B) - \log (c + b)$$

Beyspiel.

$$c = 104 \text{ R.}; \quad b = 70 \text{ R.}; \quad C - B = 16^\circ 13' 21''$$

Rechnung.

$$\begin{array}{rcl} \log (c - b) & = & \log 34 \text{ R.} = 1,5314789 \\ + \log \text{Cotang } \frac{1}{2} (C - B) & = & 10,8461199 \\ \hline \text{Summe} & = & 12,3775988 \\ - \log (c + b) & = & \log 174 \text{ R.} = 2,2405492 \\ \hline \log \text{Tang } \frac{1}{2} A & = & 10,1370496 \\ \frac{1}{2} A & = & 53^\circ 53' 38,227'' \\ A & = & 107. 47. 17. \end{array}$$

Fall 8.*Gegeben.*

$C, B, c + b; C > B$ d. i.
alle drey Winkel und die Summe zweyer Seiten.

Gesucht.

c, b d. i. die beyden Seiten deren Summe gegeben ist.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$c - b = (c + b) \cdot \text{Cotang } \frac{1}{2} (C + B) \cdot \text{Tang } \frac{1}{2} (C - B)$$

$$\frac{1}{2} (c + b) + \frac{1}{2} (c - b) = c$$

$$\frac{1}{2} (c + b) - \frac{1}{2} (c - b) = b$$

$$\log (c - b) = \log (c + b) + \log \text{Cotang } \frac{1}{2} (C + B) + \log \text{Tang } \frac{1}{2} (C - B) - 20$$

Beyspiel.

$$C = 44^{\circ} 13' 2''; \quad B = 27^{\circ} 59' 41''; \quad c + b = 174 \text{ R.}$$

Rechnung.

$$\begin{array}{l|l} C + B = 72^{\circ} 12' 43'' & C - B = 16^{\circ} 13' 21'' \\ \text{Hälfte} = 36. \quad 6. \quad 21,5. & \text{Hälfte} = 8. \quad 6. \quad 40,5. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \log(c + b) & = & 2,2405492 \\ + \log \text{Cotang } \frac{1}{2}(C + B) & = & 10,1370508 \\ + \log \text{Tang } \frac{1}{2}(C - B) - 20 & = & 9,1538801 - 20 \end{array}$$

$$\log(c - b) = 1,5314801$$

$$c - b = 34 \text{ R.}$$

$$\frac{1}{2}(c + b) = 87.$$

$$\frac{1}{2}(c - b) = 17.$$

$$\text{Summe} = c = 104.$$

$$\text{Unterschied} = b = 70.$$

*Fall 9.**Gegeben.*

$C, B, c - b; C > B$ d. i. alle drey Winkel und der Unterschied zweyer Seiten.

Gesucht.

c, b d. i. die beyden Seiten deren Unterschied gegeben ist.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$c + b = (c - b) \cdot \text{Tang } \frac{1}{2}(C + B) \cdot \text{Cotang } \frac{1}{2}(C - B)$$

$$\frac{1}{2}(c + b) + \frac{1}{2}(c - b) = c$$

$$\frac{1}{2}(c + b) - \frac{1}{2}(c - b) = b$$

$$\log(c + b) = \log(c - b) + \log \text{Tang } \frac{1}{2}(C + B) + \log \text{Cotang } \frac{1}{2}(C - B) - 20$$

*Fall 10.**Gegeben.*

$A, a, c+b$; $c > b$ d. i. ein Winkel, die ihm gegenüberstehende Seite, und die Summe der beyden übrigen Seiten.

Gesucht.

C, B d. i. die beyden übrigen Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Cosin } \frac{1}{2}(C - B) = \frac{(c+b) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} A}{a}$$

$$\frac{1}{2}(C + B) = 90^\circ - \frac{1}{2} A$$

$$\frac{1}{2}(C + B) + \frac{1}{2}(C - B) = C$$

$$\frac{1}{2}(C + B) - \frac{1}{2}(C - B) = B$$

$$\log \text{Cosin } \frac{1}{2}(C - B) = \log(c+b) + \log \text{Sin } \frac{1}{2} A - \log a$$

Beyspiel.

$$A = 107^\circ 47' 17''; \quad a = 142 \text{ R.}; \quad c+b = 174 \text{ R.}$$

Rechnung.

$$\log(c+b) = 2,2405492$$

$$+ \log \text{Sin } \frac{1}{2} A = 9,9073729$$

$$\text{Summe} = 12,1479221$$

$$- \log a = 2,1522883$$

$$\log \text{Cosin } \frac{1}{2}(C - B) = 9,9956338$$

$$\frac{1}{2}(C - B) = 8^\circ 6' 39,33''$$

$$\frac{1}{2}(C + B) = 36. 6. 21,5.$$

$$\text{Summe} = C = 44. 13. 0,83$$

$$\text{Unterschied} = B = 27. 59. 42,17$$

*Fall 11.**Gegeben.*

$A, a, c - b; c > b$ d. i. ein Winkel, die ihm gegenüberstehende Seite, und der Unterschied der beyden übrigen Seiten.

Gesucht.

C, B d. i. die beyden übrigen Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\sin \frac{1}{2} (C - B) = \frac{(c - b) \cdot \cos \frac{1}{2} A}{a}$$

$$\frac{1}{2} (C + B) = 90^\circ - \frac{1}{2} A$$

$$\frac{1}{2} (C + B) + \frac{1}{2} (C - B) = C$$

$$\frac{1}{2} (C + B) - \frac{1}{2} (C - B) = B$$

$$\log \sin \frac{1}{2} (C - B) = \log (c - b) + \log \cos \frac{1}{2} A - \log a.$$

*Fall 12.**Gegeben.*

$a, B, c + b$ d. i. eine Seite, einer von den beyden anliegenden Winkeln, und die Summe der beyden übrigen Seiten.

Gesucht.

C d. i. der andere der gegebenen Seite anliegende Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\cotang \frac{1}{2} C = \frac{((c + b) + a) \cdot \tang \frac{1}{2} B}{(c + b) - a}$$

$$\log \cotang \frac{1}{2} C = \log ((c + b) + a) + \log \tang \frac{1}{2} B - \log ((c + b) - a).$$

Beyspiel 1.

$$a = 142 \text{ R.}; \quad B = 27^\circ 59' 41''; \quad c+b = 174 \text{ R.}$$

Rechnung.

$c+b = 174 \text{ R.}$ $+ a = 142.$ $\text{Summe} = 316.$ $\text{Unterschied} = 32.$ $B = 27^\circ 59' 41''$ $\frac{1}{2}B = 13. 59. 50,5$	$\log((c+b)+a) = 2,499\,6871$ $+ \log \text{Tang } \frac{1}{2}B = 9,396\,6859$ $\text{Summe} = 11,896\,3730$ $-\log((c+b)-a) = 1,505\,1500$ $\log \text{Cotang } \frac{1}{2}C = 10,391\,2230$ $\frac{1}{2}C = 22^\circ 6' 31,3''$ $C = 44. 13. 2,6.$
--	--

Beyspiel 2.

$$a = 142 \text{ R.}; \quad B = 44^\circ 13' 2''; \quad c+b = 174 \text{ R.}$$

Rechnung.

$\log((c+b)+a) = 2,499\,6871$ $+ \log \text{Tang } \frac{1}{2}B = 9,608\,7752$ $\text{Summe} = 12,108\,4623$ $-\log((c+b)-a) = 1,505\,1500$ $\log \text{Cotang } \frac{1}{2}C = 10,603\,3123$ $\frac{1}{2}C = 13^\circ 59' 50,7''$ $C = 27. 59. 41,4.$
--

*F a l l. 13.**Gegeben.*

$a, B, c-b$; $C > B$ d. i. eine Seite, der *kleinere* anliegende Winkel, und der Unterschied der beyden übrigen Seiten.

Gesucht.

C d. i. der grössere der gegebenen Seite anliegende Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Tang } \frac{1}{2} C = \frac{(a + (c-b)) \cdot \text{Tang } \frac{1}{2} B}{a - (c-b)}$$

$$\log \text{Tang } \frac{1}{2} C = \log (a + (c-b)) + \log \text{Tang } \frac{1}{2} B - \log (a - (c-b))$$

Beyspiel.

$$a = 142 \text{ R.}; \quad B = 27^{\circ} 59' 41''; \quad c-b = 34 \text{ R.}$$

Rechnung.

$a = 142 \text{ R.}$	$\log (a + (c-b)) =$	2,245 5127
$c-b = 34.$	$+ \log \text{Tang } \frac{1}{2} B =$	9,396 6859
Summe = 176.	Summe =	11,642 1986
Untersch. = 108.	$- \log (a - (c-b)) =$	2,033 4238
$\frac{1}{2} B = 13^{\circ} 59' 50,5''$	$\log \text{Tang } \frac{1}{2} C =$	9,608 7748
	$\frac{1}{2} C =$	22° 6' 31"
	$C =$	44. 13. 2.

Fall 14.*Gegeben.*

$a, C, c-b; C > B$ d. i.
eine Seite, der *größere*
anliegende Winkel, und
der Unterschied der bey-
den übrigen Seiten.

Gesucht.

B d. i. der kleinere der
gegebenen Seite anliegen-
de Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Tang } \frac{1}{2} B = \frac{(a - (c - b)) \cdot \text{Tang } \frac{1}{2} C}{a + (c - b)}$$

$$\log \text{Tang } \frac{1}{2} B = \log (a - (c - b)) + \log \text{Tang } \frac{1}{2} C - \log (a + (c - b))$$

Beispiel.

$$a = 142 \text{ R.}; \quad C = 44^\circ 13' 2''; \quad c - b = 34 \text{ R.}$$

Rechnung.

$\log (a - (c - b))$	$=$	2,033 4238
$+ \log \text{Tang } \frac{1}{2} C$	$=$	9,608 7752
Summe	$=$	11,642 1990
$- \log (a + (c - b))$	$=$	2,245 5127
$\log \text{Tang } \frac{1}{2} B$	$=$	9,396 6863
$\frac{1}{2} B$	$=$	$13^\circ 59' 50,5''$
B	$=$	27. 59. 41.

F o r m e l n

zur Berechnung des Inhalts

geradlinichter Dreiecke.

*Man sehe Tafel I.
Fig. III.*

$$AB = c; \quad AC = b; \quad BC = a.$$

*F a l l I.**Gegeben.*A, B, C d. i. die Winkel
a und eine Seite.*Gesucht.*T d. i. des Dreiecks
Innhalt.*Formel und logarithmische Gleichung.*

$$T = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \cdot \sin A}$$

$$\log T = \log a + \log a + \log \sin B + \log \sin C - \log 2 - \log \sin A - 10$$

Beyspiel.

$$A = 107^\circ 47' 17''; \quad B = 44^\circ 13' 2''; \quad C = 27^\circ 59' 41''$$

$$a = 142 \text{ R.}$$

Rechnung.

log a =	2,152 2883
+ log a =	2,152 2883
+ log Sin B =	9,843 4698
+ log Sin C =	9,671 5340
Summe =	23,819 5804
— log 2 =	0,301 0300
Rest =	23,518 5504
— log Sin A — 10 =	9,978 7250 — 10
log T =	3,539 8254
T =	3465,975 □ R.

*F a l l II.**Gegeben.*a, b, d. i. zwey Seiten und
A ein gegenüberste-
hender Winkel.*Gesucht.*T d. i. der Innhalt des
Dreiecks.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} \begin{cases} B < 90^\circ, \text{ wenn } b < a; \\ B \text{ zweydeutig, wenn } b > a. \end{cases}$$

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin (A+B)}{2}$$

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$$

$$\log T = \log a + \log b + \log \sin (A+B) - \log 2 - 10$$

Beyspiel.

$$a = 104 \text{ R.} < b = 142 \text{ R.}; \quad A = 44^\circ 13' 2''.$$

Rechnung.

log b =	2,152 2883
+ log Sin A =	9,843 4698
Summe =	11,995 7581
— log a =	2,017 0333
log Sin B =	9,978 7248
B spitzig =	72° 12' 43"
180° =	179. 59. 60.
B stumpf =	107. 47. 17.
+ A =	44. 13. 2.
A + B stumpf =	152. 0. 19.
log a =	2,017 0333
+ log b =	2,152 2883
+ log Sin (A + B stu.) =	9,671 5340
Summe =	13,840 8556
— log 2 — 10 =	0,301 0300 — 10
log T =	3,539 8256
T =	3465,975 □ R. Zweyter
	Werth für T.

$$\begin{array}{rcl}
 A & = & 44^{\circ} 13' 2'' \\
 + B \text{ spitzig} & = & 72. 12. 43. \\
 \hline
 A + B \text{ spitzig} & = & 116. 25. 45. \\
 \log a & = & 2,0170333 \\
 + \log b & = & 2,1522883 \\
 + \log \sin (A+B \text{ sp.}) & = & 9,9520585 \\
 \hline
 \text{Summe} & = & 14,1213801 \\
 - \log 2 - 10 & = & 0,3010300 - 10 \\
 \hline
 \log T & = & 3,8203501 \\
 T & = & 6612,26 \square R. \quad \text{Erster} \\
 & & \text{Werth für } T.
 \end{array}$$

F a l l III.

<i>Gegeben.</i>		<i>Gesucht.</i>
a b		T oder des Dreiecks
C d. i. zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel		Innhalt.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}$$

$$\log T = \log a + \log b + \log \sin C - \log 2 - 10.$$

F a l l IV.

<i>Gegeben.</i>		<i>Gesucht.</i>
a, b, c, oder die drey Sei- ten.		T d. i. des Dreiecks Inn- halt.

Erste Formel und logarithmische Gleichung.

$$S = \frac{a + b + c}{2};$$

$$T = r (S \cdot (S - a) \cdot (S - b) \cdot (S - c))$$

$$\log T = \frac{\log S + \log (S - a) + \log (S - b) + \log (S - c)}{2}$$

Zweyte Formel und logarithmische Gleichung.

$$Q = r \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)};$$

$$T = \frac{Q}{4}.$$

$$\log Q = \frac{\log(a+b+c) + \log(b+c-a) + \log(a+c-b) + \log(a+b-c)}{2};$$

$$\log T = \log Q - \log 4.$$

Beyspiel 1.

$$a = 142 \text{ Ruthen}; \quad b = 104 \text{ R.}; \quad c = 70 \text{ R.}$$

Rechnung nach der ersten Formel.

$a + b + c =$	316 R.
Hälfte = $S =$	158.
$S - a =$	16.
$S - b =$	54.
$S - c =$	88.
$\log S =$	2,198 6571
$+ \log (S - a) =$	1,204 1200
$+ \log (S - b) =$	1,732 3938
$+ \log (S - c) =$	1,944 4827
Summe =	7,079 6536
Hälfte = $\log T =$	3,539 8268
$T =$	3465,985 □ Ruthen.

Rechnung nach der zweyten Formel.

$$a + b + c = 316 \text{ R.}$$

$$b + c - a = 32.$$

$$a + c - b = 108.$$

$$a + b - c = 176.$$

$$\log (a + b + c) = 2,499\,6871$$

$$+ \log (b + c - a) = 1,505\,1500$$

$$+ \log (a + c - b) = 2,033\,4238$$

$$+ \log (a + b - c) = 2,245\,5127$$

$$\text{Summe} = 8,283\,7736$$

$$\text{Hälfte} = \log Q = 4,141\,8868$$

$$- \log 4 = 0,602\,0600$$

$$\log T = 3,539\,8268$$

$$T = 3465,985 \square \text{ R.}$$

Beyspiel 2.

$$a = 142 \text{ R.}; \quad b = 104 \text{ R.}; \quad c = 133,543 \text{ R.}$$

Rechnung nach der ersten Formel.

$$a + b + c = 379,543 \text{ R.}$$

$$\text{Hälfte} = S = 189,7715.$$

$$S - a = 47,7715.$$

$$S - b = 85,7715.$$

$$S - c = 56,2285.$$

$$\log S = 2,278\,2310$$

$$+ \log (S - a) = 1,679\,1689$$

$$+ \log (S - b) = 1,933\,3430$$

$$+ \log (S - c) = 1,749\,9565$$

$$\text{Summe} = 7,640\,6994$$

$$\text{Hälfte} = \log T = 3,820\,3497$$

$$T = 6612,26 \square \text{ R.}$$

Rechnung nach der zweyten Formel.

$a + b + c =$	379,543 R.
$b + c - a =$	95,543.
$a + c - b =$	171,543.
$a + b - c =$	112,457.
$\log (a + b + c) =$	2,579 2610
$+ \log (b + c - a) =$	1,980 1989
$+ \log (a + c - b) =$	2,234 3730
$+ \log (a + b - c) =$	2,050 9866
Summe =	8,844 8195
Hälfte = $\log Q =$	4,422 4097
$- \log 4 =$	0,602 0600
$\log T =$	3,820 3497
$T =$	6612,26 $\square$ R.

F a l l V.

<i>Gegeben.</i>	<i>Gesucht.</i>
a d. i. die Seite eines gleichseitigen Dreiecks.	T d. i. des gleichseitigen Dreiecks Inhalt.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$T = a^2 \cdot 0,433 0127$$

$$\log T = \log a + \log a + 9,636 5006 - 10.$$

F o r m e l n

zur

A u f l ö s u n g r e c h t w i n k l i c h e r

K u g e l d r e i e c k e .

Formen

der

ausländischen

Kugeln

D

Seite 84

T a f e l I.

Auflösung eines in A rechtwinklichten Kugeldreiecks

A B C. *Man sehe Taf. I. Fig. IV.*

$$BC = a;$$

Die Hypotenuse.

$$AC = b;$$

$$AB = c.$$

Die beyden Perpendikel.

Gegeben.

Gesucht.

Formel.

a, B

$$\left\{ \begin{array}{l} b \quad . \quad . \quad 1) \sin b^* = \sin a \cdot \sin B^* \\ c \quad . \quad . \quad 2) \tan c = \tan a \cdot \cos B \\ C \quad . \quad . \quad 3) \cot C = \cos a \cdot \tan B \end{array} \right.$$

a, c

$$\left\{ \begin{array}{l} b \quad . \quad . \quad 4) \cos b = \frac{\cos a}{\cos c} \\ B \quad . \quad . \quad 5) \cos B = \tan c \cdot \cot a \\ C \quad . \quad . \quad 6) \sin C^* = \frac{\sin c^*}{\sin a} \end{array} \right.$$

c, C

Zweifel-
hafte Fälle.

$$\left\{ \begin{array}{l} a \quad . \quad . \quad 7) \sin a = \frac{\sin c}{\sin C} \\ b \quad . \quad . \quad 8) \sin b = \tan c \cdot \cot C \\ B \quad . \quad . \quad 9) \sin B = \frac{\cos C}{\cos c} \end{array} \right.$$

c, B

$$\left\{ \begin{array}{l} a \quad . \quad . \quad 10) \cot a = \cos B \cdot \cot c \\ b \quad . \quad . \quad 11) \tan b = \tan B \cdot \sin c \\ C \quad . \quad . \quad 12) \cos C = \sin B \cdot \cos c \end{array} \right.$$

c, b

$$\left\{ \begin{array}{l} a \quad . \quad . \quad 13) \cos a = \cos c \cdot \cos b \\ B \quad . \quad . \quad 14) \cot B = \sin c \cdot \cot b \end{array} \right.$$

B, C

$$\left\{ \begin{array}{l} a \quad . \quad . \quad 15) \cos a = \cot B \cdot \cot C \\ c \quad . \quad . \quad 16) \cos c = \frac{\cos C}{\sin B} \end{array} \right.$$

Anmerkung. Die mit einem Sternchen bezeichneten Bögen sind gleichartig. Die zweifelhaften Fälle ausgenommen, wird alles übrige durch die Zeichen der trigonometrischen Linien bestimmt.

welche für Tafel 1 die logarithmischen Gleichungen

*Gegeben.**Gesucht.*

Die Hypotenuse
und
ein Winkel.

{ Das dem gegebenen Winkel gegenüberstehende Perpendikel }
{ Das dem gegebenen Winkel anliegende Perpendikel }
{ Der andere Winkel - - - - - }

Die Hypotenuse
und
ein Perpendikel.

{ Das andere Perpendikel - - - - - }
{ Der dem gegebenen Perpendikel anliegende Winkel }
{ Der gegenüberstehende Winkel - - - }

Ein Perpendikel u. der
gegenüberstehende
Winkel.

{ Die Hypotenuse - - - - - }
{ Das andere Perpendikel - - - - - }
{ Der andere Winkel - - - - - }

Zweydeutige Fälle.

Ein Perpendikel
und
der anliegende
Winkel.

{ Die Hypotenuse - - - - - }
{ Das andere Perpendikel - - - - - }
{ Der andere Winkel - - - - - }

f e l 2

gen zur Auflösung rechtwinklischer Kugeldreiecke hält.

Formel.

- 1) $\text{Log Sin } x^*$
 $= \log \text{ Sin Hypoten.} + \log \text{ Sin gegeb. Wink.}^* - 10$
- 2) $\text{Log Tang } x$
 $= \log \text{ tang Hypoten.} + \log \text{ Cos gegeb. Wink.} - 10$
- 3) $\text{Log Cotang } x$
 $= \log \text{ Cos Hypoten.} + \log \text{ Tang gegeb. Wink.} - 10$
- 4) $\text{Log Cosin } x$
 $= 10 + \log \text{ Cos Hypoten.} - \log \text{ Cos gegeb. Perpend.}$
- 5) $\text{Log Cosin } x$
 $= \log \text{ tang gegeb. Perpend.} + \log \text{ Cot Hypoten.} - 10$
- 6) $\text{Log Sin } x^*$
 $= 10 + \log \text{ Sin gegeb. Perpend.}^* - \log \text{ Sin Hypoten.}$
- 7) $\text{Log Sin } x$
 $= 10 + \log \text{ Sin gegeb. Perpend.} - \log \text{ Sin gegeb. Winkel}$
- 8) $\text{Log Sin } x$
 $= \log \text{ tang gegeb. Perpend.} + \log \text{ Cot gegeb. Wink.} - 10$
- 9) $\text{Log Sin } x$
 $= 10 + \log \text{ Cos gegeb. Wink.} - \log \text{ Cos gegeb. Perpend.}$
- 10) $\text{Log Cotang } x$
 $= \log \text{ Cos gegeb. Wink.} + \log \text{ Cot gegeb. Perp.} - 10$
- 11) $\text{Log Tang } x$
 $= \log \text{ tang gegeb. Wink.} + \log \text{ Sin gegeb. Perp.} - 10$
- 12) $\text{Log Cosin } x$
 $= \log \text{ Sin gegeb. Wink.} + \log \text{ Cos gegeb. Perp.} - 10$

*Gegeben.**Gesucht.*Die bey-
den Per-
pendikel,

Die Hypotenuse

Ein Winkel

Die bey-
den Win-
kel.

Die Hypotenuse

Ein Perpendikel

x bezeichnet das jedesmal *Gesuchte*. Die Anmerkung

Formel.

$$13) \text{ Log Cosin } x = \log \text{ Cosin des einen Perpendikels} \\ + \log \text{ Cos des andern Perpend.} - 10$$

$$14) \text{ Log Cotang } x = \log \text{ Sin anliegenden Perpendikels} \\ + \log \text{ Cot gegenübersteh. Perp.} - 10$$

$$15) \text{ Log Cosin } x = \log \text{ Cotang des einen Winkels} \\ + \log \text{ Cot des andern Winkels} - 10$$

$$16) \text{ Log Cosin } x = 10 + \log \text{ Cos gegenübersteh. Winkels} \\ - \log \text{ Sin anliegenden Winkels.}$$

bey vorhergehender Tafel I gilt auch hier.

T a f e l 3.

Auflösung dreier Fälle: 1, 12 und 13 in Tafel 1,
durch die natürlichen Sinustafeln.

		Anstatt Formel
I.)	$\sin b^* = \frac{1}{2} \cos(a - B^*) - \frac{1}{2} \cos(a + B^*)$	I
II.)	Wenn $B < c$:	
	$\cos C = \frac{1}{2} \sin(c + B) - \frac{1}{2} \sin(c - B)$	12
	Wenn $B > c$:	
	$\cos C = \frac{1}{2} \sin(B + c) + \frac{1}{2} \sin(B - c)$	
III.)	$\cos a = \frac{1}{2} \cos(c + b) + \frac{1}{2} \cos(c - b)$	13

T a f e l 4.

Auflösung der elf Fälle: 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 15,
16 in Tafel 1 wenn die Sinus und Cosinus der
gesuchten Bögen sehr groß sind.

		Anstatt Formel
I.	$\begin{cases} \text{Tang } c = \text{Tang } a \cdot \cos B^* \\ \text{Tang } b^* = \text{Tang } B^* \cdot \sin c \end{cases}$	I
II.	$\text{Tang } \frac{1}{2} b = +r \sqrt{\text{Tang } \frac{1}{2} (a - c) \cdot \text{Tang } \frac{1}{2} (a + c)}$	4
III.	$\text{Tang } \frac{1}{2} B = +r \left(\frac{\sin(a - c)}{\sin(a + c)} \right)$	5
IV.	$\text{Tang}(45^\circ + \frac{1}{2} C^*) = \pm r \left(\frac{\text{Tang } \frac{1}{2} (a + c^*)}{\text{Tang } \frac{1}{2} (a - c^*)} \right)$	6
V.	$\text{Tang}(45^\circ + \frac{1}{2} a) = \pm r \left(\frac{\text{Tang } \frac{1}{2} (C + c)}{\text{Tang } \frac{1}{2} (C - c)} \right)$	7
a zwei- felhaft.		
VI.	$\text{Tang}(45^\circ + \frac{1}{2} b) = \pm r \left(\frac{\sin(C + c)}{\sin(C - c)} \right)$	8
b zwei- felhaft.		

		Anstatt Formel
VII. B zweifelhaft	$\text{Tang } (45^\circ + \frac{1}{2}B) = \pm r \left(\frac{\text{Cot } \frac{1}{2}(C+c)}{\text{Tang } \frac{1}{2}(C-c)} \right)$	9
VIII.	$\begin{cases} \text{Cotang } a = \text{Cosin } B \cdot \text{Cotang } c \\ \text{Cotang } C = \text{Cosin } a \cdot \text{Tang } B \end{cases}$	12
IX.	$\begin{cases} \text{Cotang } B = \text{Sin } c \cdot \text{Cotang } b \\ \text{Cotang } a = \text{Cosin } B \cdot \text{Cotang } c \end{cases}$	13
X.	$\text{Tang } \frac{1}{2}a = +r \left(-\frac{\text{Cos } (B+C)}{\text{Cos } (B-C)} \right)$	15
XI.	$\begin{cases} \text{Cosin } a = \text{Cotang } B \cdot \text{Cotang } C \\ \text{Tang } c = \text{Tang } a \cdot \text{Cosin } B \end{cases}$	16
<i>Oder:</i>		
	$\begin{cases} \text{Tang } \frac{1}{2}a = +r \left(-\frac{\text{Cos } (B+C)}{\text{Cos } (B-C)} \right) \\ \text{Tang } c = \text{Tang } a \cdot \text{Cos } B \end{cases}$	

für die Auflösung eines rechtwinklichten Kugel
und Winkel, sondern Summen und

Man sehe Tafel I.

<i>Gegeben.</i>		<i>Gesucht.</i>
$(c+b),$	a	c oder b
Summe der Hypote-	nuse.	$c > b$
Perpendikel,		Die beyden Perpendikel.
$(c-b),$	$a; c > b.$	c oder b
Unterschied Hypote-	nuse.	Die beyden Perpendikel.
der Perpen-		
dikel.		
$b, (a+c)$	{ a oder c	
	{ C	
Ein Perpendikel, und	{ Die Hypotenuse und das unbe-	
die Summe der Hypo-	kannte Perpendikel.	
tenuse u. des andern	{ Der dem unbekannten Perpen-	
Perpendikels.	dikel gegenübersteh. Winkel	
$b, (a-c)$	{ a oder $c; a > c$	
	{ C	
Ein Perpendikel, und	{ Die Hypotenuse und das unbe-	
der Unterschied der	kannte Perpendikel;	
Hypotenuse und des	{ Ob die Hyp. } $>$ } and. Perpen.	
andern Perpendikels.	{ muß be } oder } kannt seyn.	
	{ Der dem unbekannten Perpen-	
	dikel gegenübersteh. Winkel	

f e l 5

dreiecks, wenn nicht blos die einzelnen Seiten
Unterschiede derselben gegeben sind.

Fig. IV.

Formel.

$$1) \text{ Cosin } (c - b) = 2 \cdot \text{Cosin } a - \text{Cosin } (c + b)$$

$$1) \text{ Cosin des Unterschiedes der beyden Perpendikel} \\ = 2 \cdot \text{Cos der Hypotenuse} - \text{Cos Summe d. Perpend.}$$

$$2) \text{ Cosin } (c + b) = 2 \cdot \text{Cosin } a - \text{Cosin } (c - b)$$

$$2) \text{ Cosin Summe der Perpendikel} \\ = 2 \cdot \text{Cos Hypotenuse} - \text{Cos des Unterschiedes} \\ \text{der Perpendikel}$$

$$3) \text{ Tang } \frac{1}{2} (a - c) = \text{Tang}^2 \frac{1}{2} b \cdot \text{Cotang } \frac{1}{2} (a + c)$$

Ist $a + c$ so beschaffen, daß $\text{Tang } \frac{1}{2} (a - c)$ verneint wird, so ist

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (c - a) = \text{Tang}^2 \frac{1}{2} b \cdot \text{Cot } \frac{1}{2} (a + c) \text{ und } c > a.$$

$$4) \text{ Cotang } (45^\circ + \frac{1}{2} C) = \text{Tang } \frac{1}{2} b \cdot \text{Cot } \frac{1}{2} (a + c)$$

$$3) \text{ Tang } \frac{1}{2} \text{ Unterschiedes der Hypot. vom Perpendikel} \\ = \text{Tang}^2 \frac{1}{2} \text{ gegeb. Perpend.} \times \text{Cot } \frac{1}{2} \text{ gegebene Summe}$$

$$4) \text{ Cotang } (45^\circ + \frac{1}{2} \text{ gefuchte Winkel}) \\ = \text{Tang } \frac{1}{2} \text{ gegeb. Perpend.} \times \text{Cot } \frac{1}{2} \text{ gegebene Summe}$$

$$5) \text{ Tang } \frac{1}{2} (a + c) = \text{Tang}^2 \frac{1}{2} b \cdot \text{Cotang } \frac{1}{2} (a - c)$$

Für $a < c$ ist

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (a + c) = \text{Tang}^2 \frac{1}{2} b \cdot \text{Cotang } \frac{1}{2} (c - a)$$

$$6) \text{ Tang } (45^\circ + \frac{1}{2} C) = \text{Tang } \frac{1}{2} b \cdot \text{Cotang } \frac{1}{2} (a - c)$$

Hier muß man wissen, ob $a >$ oder $< c$ ist; denn wenn $a > c$, so ist C spitzig, und wenn $a < c$, so ist C stumpf.

$$5) \text{ Tang } \frac{1}{2} \text{ Summe d. Hypot. u. des unbekannten Perpend.} \\ = \text{Tang}^2 \frac{1}{2} \text{ gegeb. Perp.} \times \text{Cot } \frac{1}{2} \text{ gegeb. Unterschied}$$

$$6) \text{ Tang } (45^\circ + \frac{1}{2} \text{ gefuchte Winkel}) \\ = \text{Tang } \frac{1}{2} \text{ gegeb. Perp.} \times \text{Cot } \frac{1}{2} \text{ gegeb. Unterschied}$$

*Gegeben.**Gesucht.* $B, (a + c)$ $a \text{ oder } c$

Ein Winkel, u. die Sum-
me der Hypotenuse u.
des anliegenden Per-
pendikels

Die Hypotenuse und das anlie-
gende Perpendikel

 $B, (a - c)$ $a \text{ oder } c$ $a > c$

Ein Winkel, und der
Unterschied der Hy-
potenuse u. des anlie-
genden Perpendikels

Die Hypotenuse und das anlie-
gende Perpendikel

 $C, (a + c)$ $a \text{ oder } c$ b

Ein Winkel, und die
Summe der Hypoten.
und des gegenüberste-
henden Perpendikels

Die Hypotenuse und das ge-
genüberstehende Perpendikel

Das andere Perpendikel

Formel.

$$7) \sin(a - c) = \operatorname{Tang}^2 \frac{1}{2} B \cdot \sin(a + c)$$

hat 2 Werthe.

Wird $\sin(a + c)$ verneint, so ist $c > a$ und

$$\sin(c - a) = + \operatorname{Tang}^2 \frac{1}{2} B \cdot \sin(a + c)$$

$$7) \sin \text{ des Unterschiedes der Hypoten. vom Perpendikel} \\ = \operatorname{Tang}^2 \frac{1}{2} \text{ gegeben. Winkel } \times \sin \text{ gegeben. Summe.}$$

$$8) \sin(a + c) = \operatorname{Cotang}^2 \frac{1}{2} B \cdot \sin(a - c)$$

hat 2 Werthe.

Weis man daß $c > a$, so ist:

$$\sin(a + c) = \operatorname{Cotang}^2 \frac{1}{2} B \cdot \sin(c - a).$$

$$8) \sin \text{ der Summe der Hypoten. u. des anliegend. Perpend.} \\ = \operatorname{Cot}^2 \frac{1}{2} \text{ gegeben. Winkel } \times \sin \text{ gegeben. Unterschied.}$$

$$9) \operatorname{Tang} \frac{1}{2} (a - c) = \operatorname{Cot}^2 (45^\circ + \frac{1}{2} C) \cdot \operatorname{Tang} \frac{1}{2} (a + c)$$

Wird $\operatorname{Tang} \frac{1}{2} (a + c)$ negativ, so hat man $c > a$ und

$$\operatorname{Tang} \frac{1}{2} (c - a) = + \operatorname{Cot}^2 (45^\circ + \frac{1}{2} C) \cdot \operatorname{Tang} \frac{1}{2} (a + c).$$

$$10) \operatorname{Tang} \frac{1}{2} b = \operatorname{Cotang} (45^\circ + \frac{1}{2} C) \cdot \operatorname{Tang} \frac{1}{2} (a + c)$$

$$9) \operatorname{Tang} \frac{1}{2} \text{ Unterschiedes der Hypoten. vom Perpendikel} \\ = \operatorname{Cot}^2 (45^\circ + \frac{1}{2} \text{ gegeben. Wink.}) \times \operatorname{Tang} \frac{1}{2} \text{ gegeben. Summe}$$

$$10) \operatorname{Tang} \frac{1}{2} \text{ gesuchten Perpendikels} \\ = \operatorname{Cot} (45^\circ + \frac{1}{2} \text{ gegeben. Winkel}) \times \operatorname{Tang} \frac{1}{2} \text{ gegeben. Summe}$$

Gegeben.	Gesucht.
$C^*, (a - c^*)$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ist } C \text{ spitzig} \\ \text{so ist} \\ a > c \end{array} \right.$ $a \text{ oder } c;$ b
Ein Winkel, und der Unterschied zwischen der Hypotenuse und dem gegenüberstehenden Perpendikel,	Die Hypotenuse und das gegenüberstehende Perpendikel; ob die Hypot. $>$ oder $<$ gegenüberst. Perpend. wird aus dem gegebenen Winkel bekannt seyn Das andere Perpendikel
$(B + C), a$	$B \text{ oder } C$
Die Summe der Winkel, u. die Hypotenuse	$C > B$
$C - B, a$	Die beyden Winkel
$C > B$	$B \text{ oder } C$
Der Untersch. der Winkel, u. die Hypotenuse.	Die beyden Winkel

Formel.

$$11) \text{Tang } \frac{1}{2}(a+c) = \text{Tang}^2(45^\circ + \frac{1}{2}C), \text{Tang } \frac{1}{2}(a-c)$$

Für $a < c$ d. i. wenn C stumpf, ist

$$\text{Tang } \frac{1}{2}(a+c) = \text{Tang}^2(45^\circ + \frac{1}{2}C) \cdot \text{Tang } \frac{1}{2}(c-a).$$

$$12) \text{Tang } \frac{1}{2}b = \text{Tang}(45^\circ + \frac{1}{2}C) \cdot \text{Tang } \frac{1}{2}(a-c)$$

Hier findet man b ohne vorher auszumachen, ob $a >$ oder $< c$.

Hierauf läßt sich aus b und C durch Fo. 10 und 11 in Tafel 1 oder 2 a und c suchen. Aber wenn man weiß, (und dies läßt sich allezeit aus dem gegebenen Winkel C beurtheilen, ist nemlich C spitzig, so ist $C < A = 90^\circ$, folglich auch $c < a$; und wenn C stumpf, so ist $C > A = 90^\circ$, daher $c > a$) daß $a > c$, so ist gegeben: $a - c = m$; wird nun nur z. E. a durch Fo. 10 in Tafel 1 oder 2 gesucht, so hat man sogleich $c = a - m$ ohne den Gebrauch der Fo. 11 in Tafel 1 und 2. Ist bekannt daß $a < c$, so ist gegeben, $c - a = \mu$, daß also, wenn man z. E. a durch Fo. 10 in Tafel 1, 2 gefunden, sich, ohne Fo. 11 in beyden Tafeln, $c = a + \mu$ ergibt.

$$11) \text{Tang } \frac{1}{2} \text{ Summe der Hypot. u. des gegenüberst. Perp.} \\ = \text{Tang}^2(45^\circ + \frac{1}{2} \text{ gegeb. Winkel}) \times \text{Tang } \frac{1}{2} \text{ gegebenen Unterschied.}$$

$$12) \text{Tang } \frac{1}{2} \text{ gesuchten Perpendikels} \\ = \text{Tang}(45^\circ + \frac{1}{2} \text{ gegeb. Winkel}) \times \text{Tang } \frac{1}{2} \text{ gegebenen Unterschied.}$$

$$13) \text{Cosin}(C-B) = -\text{Cosin}(B+C) \cdot \text{Cotang}^2 \frac{1}{2}a$$

$$13) \text{Cosin des Unterschiedes der Winkel} \\ = -\text{Cosin gegebene Summe} \times \text{Cot}^2 \frac{1}{2} \text{ Hypotenuse.}$$

$$14) \text{Cosin}(B+C) = -\text{Cosin}(C-B) \cdot \text{Tang}^2 \frac{1}{2}a$$

$$14) \text{Cosin der Summe der Winkel} \\ = -\text{Cos gegeb. Untersch.} \times \text{Tang}^2 \frac{1}{2} \text{ Hypotenuse.}$$

Beispiel 1 zu Formel 6 in Tafel 1, 2 und 4.

$$a = 61^{\circ} 4' 56''; \quad c = 40^{\circ} 30' 20'' \text{ spitzig.}$$

Rechnung nach Fo. 6 in Tafel 1, 2.

$$10 + \log \sin c^* = 19,8125937$$

$$- \log \sin a = 9,9421641$$

$$\log \sin C^* = 9,8704296$$

$$C = 47^{\circ} 54' 21'' \text{ spitzig.}$$

Rechnung nach IV in Tafel 4.

$$a + c = 101^{\circ} 35' 16''$$

$$\frac{1}{2}(a + c) = 50. 47. 38.$$

$$a - c = 20. 34. 36.$$

$$\frac{1}{2}(a - c) = 10. 17. 18.$$

$$20 + \log \tan \frac{1}{2}(a + c) = 30,0884388$$

$$- \log \tan \frac{1}{2}(a - c) = 9,2589256$$

$$\text{Unterschied} = 20,8295132$$

$$\text{Hälfte} = \log \tan (45^{\circ} + \frac{1}{2}C) = 10,4147566$$

$$45^{\circ} + \frac{1}{2}C = 68^{\circ} 57' 10'',5$$

$$- 45^{\circ} = 45. 0. 0.$$

$$\frac{1}{2}C = 23. 57. 10,5$$

$$C = 47. 54. 21. \text{ spitzig.}$$

Beyspiel 2 zu Formel 6 in Tafel 1, 2 und 4.

$$a = 100^\circ; \quad c = 120^\circ \text{ stumpf.}$$

Rechnung nach Fo. 6 in Tafel 1, 2.

$$10 + \log \sin c^* = 19,9375306$$

$$- \log \sin a = 9,9933515$$

$$\log \sin 61^\circ 34' 6'' = 9,9441791$$

$$180. \quad 0. \quad 0.$$

$$C^* = 118.25.54. \text{ stumpf.}$$

Rechnung nach IV in Tafel 4.

$$a + c = 220^\circ 0' 0''$$

$$\frac{1}{2}(a + c) = 110. \quad 0. \quad 0.$$

$$a - c = -20. \quad 0. \quad 0.$$

$$\frac{1}{2}(a - c) = -10. \quad 0. \quad 0.$$

$$20 + \log \tan \frac{1}{2}(a + c) = -30,4389341$$

$$- \log \tan \frac{1}{2}(a - c) = -9,2463188$$

$$\text{Unterschied} = 21,1926153$$

$$\text{Hälfte} = \log \tan (45^\circ + \frac{1}{2}C) = 10,5963076$$

$$45^\circ + \frac{1}{2}C = 75^\circ 47' 3''$$

$$- 45^\circ = 45. \quad 0. \quad 0.$$

$$\frac{1}{2}C = 30.47.3.$$

$$C = 61.34.6. \text{ spitzig.}$$

$$C^* = 118.25.54. \text{ stumpf.}$$

Allgemeine Regel für die Auflösung derjenigen
schiefwinklichten Kugeldreiecke, wo eine Seite
 $= 90^\circ$ ist.

Man sehe Tafel I. Fig. IV. und V.

Ein solches Kugeldreieck muß man in ein anderes
verwandeln, dessen Winkel die Supplemente, oder
Ergänzungen zu 180° , der Seiten, und dessen Seiten
die Supplemente der Winkel des gegebenen Dreiecks
sind. Auf diese Weise erhält man ein rechtwinklichtes
Kugeldreieck, dessen Auflösung sich nach den vorher-
gehenden Tafeln bewerkstelligen läßt.

Wenn z. B. in Fig. V.

<i>gegeben wäre</i>	<i>und gesucht würde</i>
$A = 90^\circ$	$C = 83^\circ 36'$
$B = 41^\circ 10'$	
$c = 80. 15.$	

so nähme man von jedem dieser drey gegebenen Bögen
sein Supplement zu 180° , und setzte diese Supplemente
ebendenselben Buchstaben in Fig. IV gleich, nemlich

$$\begin{aligned} A &= 90^\circ \\ B &= 138^\circ 50' \\ c &= 99. 45. \end{aligned}$$

Nun suchte man hieraus zu Fig. IV: $C = 96^\circ 24'$, so
wäre das Supplement von diesem C in Fig. IV, d. i.
 $180^\circ - C = 83^\circ 36'$, das Fig. V. gesuchte C.

Eben so reduzirt man in allen übrigen Fällen das
Dreieck in Fig. V. auf Fig. IV.

A u f l ö s u n g
gleichschenkliger
Kugeldreiecke.

*Man ſehe Tafel I.
Fig. VI.*

F a l l 1.*Gegeben.**a, b d. i. Schenkel und Grundlinie.**Gesucht.**A d. i. Winkel an der Grundlinie.**Formel.*

$$1) \text{ Cosin } A = \text{Tang } \frac{1}{2} b \cdot \text{Cotang } a$$

$$2) \text{ Tang } \frac{1}{2} A = + r \left(\frac{\text{Sin } (a - \frac{1}{2} b)}{\text{Sin } (a + \frac{1}{2} b)} \right)$$

F a l l 2.*Gegeben.**a, b d. i. Schenkel und Grundlinie.**Gesucht.**B d. i. Winkel an der Spitze.**Formel.*

$$1) \text{ Sin } \frac{B^*}{2} = \frac{\text{Sin } \frac{b^*}{2}}{\text{Sin } a}$$

$$2) \text{ Tang } (45^\circ + \frac{1}{2} \cdot \frac{B^*}{2}) = \pm r \left(\frac{\text{Tang } \frac{1}{2} [a + \frac{b^*}{2}]}{\text{Tang } \frac{1}{2} [a - \frac{b^*}{2}]} \right)$$

$\frac{b}{2}$ und $\frac{B}{2}$ sind allezeit gleichartig; oder $\frac{B}{2}$ ist allemal spitzig, weil es $\frac{b}{2}$ stets ist.

F a l l 3.*Gegeben.**a, A, d. i. Schenkel und Winkel an der Grundlinie.**Gesucht.**b d. i. Grundlinie.**Formel.*

$$\text{Tang } \frac{1}{2} b = \text{Tang } a \cdot \text{Cosin } A.$$

F a l l 4.*Gegeben.*

a, A, d. i. Schenkel und Winkel an der Grundlinie.

Gesucht.

B d. i. Winkel an der Spitze.

Formel.

$$\text{Cotang } \frac{1}{2} B = \text{Cosin } a \cdot \text{Tang } A.$$

F a l l 5.*Gegeben.*

a, B d. i. Schenkel und Winkel an der Spitze.

Gesucht.

b d. i. Grundlinie.

Formel.

$$1) \sin \frac{b^*}{2} = \sin a \cdot \sin \frac{B^*}{2}$$

$$2) \sin \frac{b^*}{2} = \frac{1}{2} \text{Cosin } (a - \frac{B^*}{2}) - \frac{1}{2} \text{Cosin } (a + \frac{B^*}{2})$$

$$3) \text{Tang } u = \text{Tang } a \cdot \text{Cosin } \frac{B^*}{2};$$

$$\text{Tang } \frac{b^*}{2} = \text{Tang } \frac{B^*}{2} \cdot \sin u$$

 $\frac{B}{2}$ und $\frac{b}{2}$ sind allezeit gleichartig oder spitzig.

F a l l 6.*Gegeben.*

a, B d. i. Schenkel und Winkel an der Spitze.

Gesucht.

A d. i. Winkel an der Grundlinie.

Formel.

$$\text{Cotang } A = \text{Cosin } a \cdot \text{Tang } \frac{1}{2} B.$$

F a l l 7.*Gegeben.*

b, A d. i. Grundlinie und Winkel an der Grundlinie.

Gesucht.

a d. i. Schenkel.

Formel.

$$\text{Cotang } a = \text{Cotang } \frac{1}{2} b \cdot \text{Cosin } A.$$

*Fall 8.**Gegeben.**b, A d. i. Grundlinie und Winkel an der Grundlinie.**Gesucht.**B d. i. Winkel an der Spitze.**Formel.*

$$1) \text{Cosin } \frac{1}{2} B = \text{Cosin } \frac{1}{2} b \cdot \text{Sin } A.$$

$$2) \text{ Wenn } A < \frac{1}{2} b:$$

$$\text{Cosin } \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} \text{Sin } (\frac{1}{2} b + A) - \frac{1}{2} \text{Sin } (\frac{1}{2} b - A);$$

$$\text{Wenn } A > \frac{1}{2} b:$$

$$\text{Cosin } \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} \text{Sin } (A + \frac{1}{2} b) + \frac{1}{2} \text{Sin } (A - \frac{1}{2} b).$$

$$3) \text{Cotang } a = \text{Cosin } A \cdot \text{Cotang } \frac{1}{2} b;$$

$$\text{Cotang } \frac{1}{2} B = \text{Cosin } a \cdot \text{Tang } A.$$

*Fall 9.**Gegeben.**b, B d. i. Grundlinie und Winkel an der Spitze.**Gesucht.**a d. i. Schenkel.**a zweifelhaft.**Formel.*

$$1) \text{Sin } a = \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} b}{\text{Sin } \frac{1}{2} B}$$

$$2) \text{Tang } (45^\circ + \frac{1}{2} a) = \pm r \frac{\text{Tang } \frac{1}{4} [B + b]}{\text{Tang } \frac{1}{4} [B - b]}$$

*Fall 10.**Gegeben.**b, B d. i. Grundlinie und Winkel an der Spitze.**Gesucht.**A d. i. Winkel an der Grundlinie.**A zweifelhaft.*

Formel.

$$1) \sin A = \frac{\cos \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} b}$$

$$2) \tan (45^\circ + \frac{1}{2} A) = \pm r \frac{\cotang \frac{1}{4} [B+b]}{\tan \frac{1}{4} [B-b]}$$

*Fall 11.**Gegeben.*

A, B d. i. Winkel an der Grundlinie, und Winkel an der Spitze.

Gesucht.

a d. i. Schenkel.

Formel.

$$1) \cos a = \cotang A \cdot \cotang \frac{1}{2} B$$

$$2) \tan \frac{1}{2} a = + r - \frac{\cos (A + \frac{1}{2} B)}{\cos (A - \frac{1}{2} B)}$$

*Fall 12.**Gegeben.*

A, B d. i. Winkel an der Grundlinie, und Winkel an der Spitze.

Gesucht.

b d. i. Grundlinie.

Formel.

$$1) \cos \frac{1}{2} b = \frac{\cos \frac{1}{2} B}{\sin A}$$

$$2) \cos a = \cotang A \cdot \cotang \frac{1}{2} B;$$

$$\tan \frac{1}{2} b = \tan a \cdot \cos A.$$

$$3) \tan \frac{1}{2} a = + r - \frac{\cos [A + \frac{1}{2} B]}{\cos [A - \frac{1}{2} B]};$$

$$\tan \frac{1}{2} b = \tan a \cdot \cos A.$$

A u f l ö s u n g
schiefwinklicher
K u g e l d r e i e c k e.

*Man sehe Tafel I.
Fig. VII.*

$BC = a; \quad AC = b; \quad AB = c.$

*F a l l 1.**Gegeben.**a, b, c, oder die drey Seiten.**Gesucht.**Ein Winkel oder x.**Formel.*

$$\frac{a+b+c}{2} = S \text{ gesetzt, und}$$

a für die Seite angenommen, welche dem gesuchten Winkel *x* gegenübersteht, ist:

$$1) \sin \frac{1}{2} x = r \left[\frac{\sin(S-b) \cdot \sin(S-c)}{\sin b \cdot \sin c} \right];$$

$$\log \sin \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \cdot (20 + \log \sin(S-b) + \log \sin(S-c) - \log \sin b - \log \sin c)$$

$$2) \cos \frac{1}{2} x = r \left[\frac{\sin S \cdot \sin(S-a)}{\sin b \cdot \sin c} \right]$$

$$3) \tan \frac{1}{2} x = r \left[\frac{\sin(S-b) \cdot \sin(S-c)}{\sin S \cdot \sin(S-a)} \right]$$

$$4) \text{ Man nenne Basis} = c;$$

$$\text{Seiten} = a, b;$$

so ist

$\tan u = \tan \frac{1}{2}(a+b) \cdot \tan \frac{1}{2}(a \sim b) \cdot \cot \frac{1}{2}c;$
das Zeichen $\sim$ bedeutet, dass allezeit der kleinere Bogen vom größern abgezogen werden soll.

$$\text{Großes Segment} = \frac{1}{2}c + u;$$

$$\text{Kleines Segment} = \frac{1}{2}c - u;$$

$$\cos x = \tan \text{des anliegenden Segments} \cdot \cot b;$$

In dieser letzten Gleichung nimmt man zu der größten Seite das große Segment, das kleine zu der kleinsten Seite; und wenn das kleine Segment negativ und $< 90^\circ$ sich findet, so setzt man die Tangente dieses Segments negativ.

In manchen Fällen können auch folgende Formeln brauchbar seyn, in welchen ich den gesuchten Winkel A statt x nenne:

$$5) \text{ Cosin } A = \frac{\text{Cosin } a - \text{Cosin } b \cdot \text{Cosin } c}{\text{Sin } b \cdot \text{Sin } c};$$

$$6) \text{ Cosin } A = \frac{\text{Cosin } a}{\text{Sin } b \cdot \text{Sin } c} - \text{Cotang } b \cdot \text{Cotang } c;$$

$$7) \text{ Cosin } A = 1 - \frac{\text{Cosin } (b - c) - \text{Cosin } a}{\text{Sin } b \cdot \text{Sin } c};$$

$$8) \alpha) \text{ Cos } (b - c) + \text{Cos } (b + c) = p;$$

$$\beta) \text{ Cos } (b - c) - \text{Cos } (b + c) = q;$$

$$\gamma) \text{ Cos } A = \frac{\text{Cos } a - \frac{1}{2} p}{\frac{1}{2} q}.$$

$$9) \text{ Sin } \frac{1}{2} A = r \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (a + [b - c]) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} (a - [b - c])}{\text{Sin } b \cdot \text{Sin } c};$$

$$10) \text{ Cosin } \frac{1}{2} A = r \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} ([b + c] + a) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} ([b + c] - a)}{\text{Sin } b \cdot \text{Sin } c};$$

$$11) \text{ Tang } \frac{1}{2} A = r \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (a + [b - c]) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} (a - [b - c])}{\text{Sin } \frac{1}{2} ([b + c] + a) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} ([b + c] - a)};$$

12) Alle drey Winkel auf einmal ergeben sich durch folgende Gleichungen:

$$a > b;$$

$$\text{Cotang } \frac{1}{2} C = r \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} ([a + b] + c) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} ([a + b] - c)}{\text{Sin } \frac{1}{2} (c + [a - b]) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} (c - [a - b])};$$

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (A + B) = \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (a - b) \cdot \text{Cotang } \frac{1}{2} C}{\text{Cos } \frac{1}{2} (a + b)};$$

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (a - b) \cdot \text{Cotang } \frac{1}{2} C}{\text{Sin } \frac{1}{2} (a + b)};$$

$$\frac{1}{2} (A + B) + \frac{1}{2} (A - B) = A;$$

$$\frac{1}{2} (A + B) - \frac{1}{2} (A - B) = B.$$

13) Man sehe die Anmerkung im folgenden Fall 2, bey 13.

F a l l 2.*Gegeben.*

A, B, C, oder die drey Winkel.

Gesucht.

Eine Seite oder x.

Formel.

$$\frac{A + B + C}{2} = S \text{ und}$$

A für denjenigen Winkel angenommen, welcher der gesuchten Seite x gegenübersteht, ist:

$$1) \sin \frac{1}{2} x = r \frac{\cos S \cdot \cos (S - A)}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2) \cos \frac{1}{2} x = r \frac{\cos (S - B) \cdot \cos (S - C)}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$3) \tan \frac{1}{2} x = r \frac{\cos S \cdot \cos (S - A)}{\cos (S - B) \cdot \cos (S - C)}$$

4) Es heiße *Vertikaleinkel* = C;

Winkel schlechtweg = A, B;

so ist

$$\tan u = \tan \frac{1}{2} (A + B) \cdot \tan \frac{1}{2} (A - B) \cdot \tan \frac{1}{2} C;$$

$$\text{Großes Segment} = \frac{1}{2} C + u;$$

$$\text{Kleines Segment} = \frac{1}{2} C - u;$$

$$\cos x = \cot \text{ des anliegenden Segments } \times \cot B.$$

In dieser letzten Gleichung nimmt man zu dem größten *Winkel* das kleine Segment, und das große Segment zu dem kleinsten *Winkel*: findet sich das kleine Segment negativ und $< 90^\circ$, so setzt man die Cotangente dieses Segments negativ.

a statt x gesetzt, ist:

$$5) \text{ Cosin } a = \frac{\text{Cosin } A + \text{Cosin } B \cdot \text{Cosin } C}{\text{Sin } B \cdot \text{Sin } C};$$

$$6) \text{ Cosin } a = \frac{\text{Cosin } A}{\text{Sin } B \cdot \text{Sin } C} + \text{Cotang } B \cdot \text{Cotang } C;$$

$$7) \text{ Cosin } a = \frac{\text{Cosin } (B - C) + \text{Cosin } A}{\text{Sin } B \cdot \text{Sin } C} - 1;$$

$$8) \alpha) \text{ Cos } (B - C) + \text{Cos } (B + C) = P;$$

$$\beta) \text{ Cos } (B - C) - \text{Cos } (B + C) = Q;$$

$$\gamma) \text{ Cos } a = \frac{\text{Cos } A + \frac{1}{2} P}{\frac{1}{2} Q};$$

$$9) \text{ Sin } \frac{1}{2} a = r \left(- \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} ([B+C] + A) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} ([B+C] - A)}{\text{Sin } B \cdot \text{Sin } C} \right);$$

$$10) \text{ Cos } \frac{1}{2} a = r \left(\frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (A + [B-C]) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} (A - [B-C])}{\text{Sin } B \cdot \text{Sin } C} \right);$$

$$11) \text{ Tang } \frac{1}{2} a = r \left(- \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} ([B+C] + A) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} ([B+C] - A)}{\text{Cos } \frac{1}{2} (A + [B-C]) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} (A - [B-C])} \right);$$

12) Alle drey Seiten auf einmal:

$$A > B;$$

$$\text{Tang } \frac{1}{2} c = r \left(- \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} ([A+B] + C) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} ([A+B] - C)}{\text{Cos } \frac{1}{2} (C + [A-B]) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} (C - [A-B])} \right);$$

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (a + b) = \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (A - B) \cdot \text{Tang } \frac{1}{2} c}{\text{Cos } \frac{1}{2} (A + B)};$$

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (a - b) = \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (A - B) \cdot \text{Tang } \frac{1}{2} c}{\text{Sin } \frac{1}{2} (A + B)};$$

$$\frac{1}{2} (a + b) + \frac{1}{2} (a - b) = a;$$

$$\frac{1}{2} (a + b) - \frac{1}{2} (a - b) = b.$$

13) Es lassen sich auch aus den drey Winkeln A, B, C , die Seiten a, b, c , durch Hülfe des sogenannten *Polar* - oder *Ergänzungs* - *Dreiecks* berechnen, indem man gegenwärtigen Fall auf den vorigen ersten, wo aus den drey Seiten die Winkel gefunden werden, auf folgende Art reduzirt:

Man nimmt jedes Winkels Ergänzung zu 180° , d. i. man macht *Taf. I. Fig. VIII.*

$$180^\circ - A = \alpha;$$

$$180^\circ - B = \beta;$$

$$180^\circ - C = \gamma;$$

nun sucht man aus den drey Seiten α, β, γ nach den Formeln des vorigen 1ten Falles, die gegenüberstehenden Winkel $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$; so ist

$$a = 180^\circ - \mathcal{A};$$

$$b = 180^\circ - \mathcal{B};$$

$$c = 180^\circ - \mathcal{C}.$$

Anmerkung zu Fall 1.

Eben so läßt sich Fall 1 auf den gegenwärtigen Fall 2 reduziren. Nämlich:

$$180^\circ - a = \mathcal{A};$$

$$180^\circ - b = \mathcal{B};$$

$$180^\circ - c = \mathcal{C};$$

aus den Winkeln $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ ergeben sich die gegenüberstehenden Seiten α, β, γ ; endlich

$$A = 180^\circ - \alpha;$$

$$B = 180^\circ - \beta;$$

$$C = 180^\circ - \gamma.$$

Fall 3.**Gegeben.**

Zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel, oder
 x , a und C .

Gesucht.

Einer von den beyden übrigen Winkeln, oder
 X .

Formel.

x bedeute die dem gesuchten Winkel
 X gegenüberstehende Seite;
 a die andere gegebene Seite; und
 C den gegebenen Winkel. So ist:

$$1) \text{ Tang } u = \text{ Tang } x \cdot \text{Cosin } C;$$

$$\text{ Tang } X = \frac{\text{ Tang } C \cdot \text{Sin } u}{\text{Sin } (a - u)}.$$

Wenn $u > a$, ist Sinus $(a - u)$ verneint.

$$2) \text{ Tang } X = \frac{\text{Sin } C}{\text{Sin } a \cdot \text{Cotang } x - \text{Cosin } a \cdot \text{Cosin } C};$$

$$3) \text{ Cotang } X = \frac{\text{Sin } a}{\text{Sin } C \cdot \text{Tang } x} - \text{Cosin } a \cdot \text{Cotang } C;$$

$$4) \text{ Cotang } X = \frac{\text{Sin } a \cdot \text{Cosin } x - \text{Cosin } a \cdot \text{Sin } x \cdot \text{Cosin } C}{\text{Sin } x \cdot \text{Sin } C};$$

$$5) \text{ Tang } u = \text{Cotang } a \cdot \text{Tang } x \cdot \text{Cosin } C;$$

$$\text{ Tang } X = \frac{\text{Sin } C \cdot \text{Tang } x \cdot \text{Cosin } u}{r^2 \cdot \text{Sin } a \cdot \text{Sin } (45^\circ - u)}.$$

$$6) \text{ Tang } u = \frac{\text{Cotang } \frac{1}{2} C \cdot \text{Sin } (x \pm a)}{\text{Sin } (x + a)};$$

$$\text{Großes Segment} = \frac{1}{2} C + u;$$

$$\text{Kleines Segment} = \frac{1}{2} C - u;$$

$$\text{Cot } X = \text{Cos } a \cdot \text{Tang des anliegenden Segments.}$$

In dieser letzten Gleichung nimmt man zu der größten von den bekannten Seiten (d. i. zu $a > x$) das große Segment, zu der kleinsten (d. i. wenn $a < x$) das kleine Segment: und wenn das kleine Segment negativ und $< 90^\circ$ ist, so setzt man die Tang. dieses Segments negativ.

7) Die beyden Winkel auf einmal ergeben sich durch folgende Formeln, wobey ich mich aber einer andern Bezeichnungsart bediene:

Gegeben.

b, c, A

$b > c$

oder 2 Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel A .

Gesucht.

B und C

$B > C$

oder die beyden Winkel B und C auf einmal;
 B steht b und C steht c gegenüber.

Formel.

$$1) \text{Tang } \frac{1}{2} (B + C) = \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (b - c) \cdot \text{Cot } \frac{1}{2} A}{\text{Cos } \frac{1}{2} (b + c)};$$

$$2) \text{Tang } \frac{1}{2} (B - C) = \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (b - c) \cdot \text{Cot } \frac{1}{2} A}{\text{Sin } \frac{1}{2} (b + c)};$$

$$3) \frac{1}{2} (B + C) + \frac{1}{2} (B - C) = B;$$

$$4) \frac{1}{2} (B + C) - \frac{1}{2} (B - C) = C.$$

8) Man sehe 6) bey Fall 5.

Fall 4.

Gegeben.

2 Seiten und der eingeschlossene Winkel, oder
 a, c und B .

$a > c$

Gesucht.

Die dritte Seite, oder b .

Erste Formel.

$$\text{Tang } u = \text{Tang } a \cdot \text{Cos } B;$$

$$\text{Cosin } b = \frac{\text{Cos } a \cdot \text{Cos } (c - u)}{\text{Cos } u}$$

Zweyte Formel.

$$\text{Cosin } b = \text{Cosin } B \cdot \text{Sin } a \cdot \text{Sin } c + \text{Cosin } a \cdot \text{Cosin } c;$$

Dritte Formel.

a) Für B spitzig:

$$\cos b = \cos(a - c) - (1 - \cos B) \cdot \sin a \cdot \sin c;$$

β) Für B stumpf:

$$\cos b = \cos(a + c) + (1 + \cos B) \cdot \sin a \cdot \sin c.$$

Wenn die gefuchte Seite b klein ist, kann man sich folgender Formeln bedienen:

Vierte Formel.

$$\text{Tang } u = r \left(\frac{\sin^2 \frac{1}{2} B \cdot \sin a \cdot \sin c}{\sin^2 \frac{1}{2} (a - c)} \right);$$

$$\sin \frac{1}{2} b = \frac{\sin \frac{1}{2} (a - c)}{\cos u}.$$

Für die logarithmische Rechnung:

Log Tang u

$$= \frac{1}{2} \cdot (\log \sin \frac{1}{2} B + \log \sin \frac{1}{2} B + \log \sin a + \log \sin c - \log \sin \frac{1}{2} (a - c) - \log \sin \frac{1}{2} (a - c));$$

$$\log \sin \frac{1}{2} b = 10 + \log \sin \frac{1}{2} (a - c) - \log \cos u.$$

Fünfte Formel.

$$\cos u = r \left(\frac{\cos^2 \frac{1}{2} B \cdot \sin a \cdot \sin c}{\sin^2 \frac{1}{2} (a + c)} \right);$$

$$\sin \frac{1}{2} b = \sin \frac{1}{2} (a + c) \cdot \sin u.$$

Für die logarithmische Rechnung:

Log Cosin u

$$= \frac{1}{2} (\log \cos \frac{1}{2} B + \log \cos \frac{1}{2} B + \log \sin a + \log \sin c - \log \sin \frac{1}{2} (a + c) - \log \sin \frac{1}{2} (a + c));$$

$$\log \sin \frac{1}{2} b = \log \sin \frac{1}{2} (a + c) + \log \sin u - 10.$$

6) Man sehe 6) bey Fall 6.

F a l l 5.*Gegeben.*

Zwey Winkel und die eingeschlossene Seite, oder
X, C und b.

Gesucht.

Eine von den beyden übrigen Seiten, oder x.

Formel.

Es heiße allezeit:

X derjenige von den beyden gegebenen Winkeln,
welcher

x d. i. der gesuchten Seite gegenübersteht;

C der andere gegebene Winkel,

b die gegebene Seite. So ist:

$$1) \text{ Cotang } u = \text{Tang } X \cdot \text{Cosin } b;$$

$$\text{Tang } x = \frac{\text{Tang } b \cdot \text{Cosin } u}{\text{Cosin } (C - u)}.$$

Oder nach einer 2ten Auflösungsart:

$$2) \text{ Tang } u = \text{Tang } X \cdot \text{Cosin } b;$$

$$\text{Tang } x = \frac{\text{Tang } b \cdot \text{Sin } u}{\text{Sin } (C + u)}.$$

$$3) \text{ Tang } x = \frac{\text{Sin } b}{\text{Sin } C \cdot \text{Cotang } X + \text{Cosin } C \cdot \text{Cosin } b};$$

$$4) \text{ Tang } u = \frac{\text{Tang } \frac{1}{2} b \cdot \text{Sin } (X \sim C)}{\text{Sin } (X + C)};$$

$$\text{Großes Segment} = \frac{1}{2} b + u;$$

$$\text{Kleines Segment} = \frac{1}{2} b - u;$$

$$\text{Cotang } x = \text{Cos } C \cdot \text{Cotang des anliegenden Segments}.$$

In dieser letzten Gleichung gebraucht man bey dem kleinsten von den beyden bekannten Winkeln das groſſe Segment; das kleine Segment bey dem grössten: wenn das kleine Segment negativ und $< 90^\circ$ gefunden wird, so setzt man die *Cotang* dieses Segments negativ.

5) Die beyden unbekannten Seiten auf einmal:

Gegeben.

A, B, c

A > B

Gesucht.

a, b

a > b

Formel.

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (a+b) = \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (A-B) \cdot \text{Tang } \frac{1}{2} c}{\text{Cos } \frac{1}{2} (A+B)};$$

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (a-b) = \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (A-B) \cdot \text{Tang } \frac{1}{2} c}{\text{Sin } \frac{1}{2} (A+B)};$$

$$\frac{1}{2} (a+b) + \frac{1}{2} (a-b) = a;$$

$$\frac{1}{2} (a+b) - \frac{1}{2} (a-b) = b.$$

6) Dieser Fall läßt sich auch durch Reduktion auf Fall 3 auflösen, da man auf eine ähnliche Art wie bey Fall 2 geschehen ist, das Polar- oder Ergänzungsdreieck statt des gegebenen gebraucht. Daher läßt sich umgekehrt, Fall 3 durch Fall 5 ebenfalls auflösen. Wenn man sich nemlich hiezu Tafel I. Fig. IX. bedient, so ist:

Für Fall 5 durch Fall 3.

Gegeben: A, B, c.

Auflösung:

$$180^\circ - A = \alpha$$

$$180^\circ - B = \beta$$

$$180^\circ - c = \mathfrak{C}$$

Aus den Seiten α , β und dem eingeschlossenen Winkel $\mathfrak{C}$ wird der Winkel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nach Fall 3 berechnet. Alsdann ist:

$$a = 180^\circ - \mathfrak{A}.$$

$$b = 180^\circ - \mathfrak{B}.$$

Für Fall 3 durch Fall 5.

Gegeben: a, b, C.

Auflösung:

$$180^\circ - a = \mathfrak{A}$$

$$180^\circ - b = \mathfrak{B}$$

$$180^\circ - C = \gamma$$

Aus den Winkeln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und der eingeschlossenen Seite γ berechnet man nach Fall 5 die Seite α und β ; alsdann ist:

$$A = 180^\circ - \alpha$$

$$B = 180^\circ - \beta.$$

F a l l 6.*Gegeben.*

Zwey Winkel und die eingeschlossene Seite,
oder A, B und c

Gesucht.

Der dritte Winkel
oder C

Formel.

Es sey:

A Einer von den beyden gegebenen Winkeln, entweder der grössere oder der kleinere;

B der andere gegebene Winkel;

c die gegebene Seite. So ist:

$$1) \text{ Cotang } u = \text{Cosin } c. \text{ Tang } A;$$

$$\text{Cosin } C = \frac{\text{Cosin } A. \text{Sin } (B - u)}{\text{Sin } u}.$$

Wenn $u > B$, ist $\text{Sin } (B - u)$ verneint.

$$2) \text{ Tang } u = \text{Cosin } c. \text{ Tang } A;$$

$$\text{Cosin } C = \frac{-\text{Cosin } A. \text{Cosin } (B + u)}{\text{Cosin } u}$$

$$3) \text{ Cosin } C = \text{Cosin } c. \text{Sin } A. \text{Sin } B - \text{Cosin } A. \text{Cosin } B;$$

$$4) \quad \alpha) \text{ Wenn } c \text{ spitzig:}$$

$$\text{Cos } C = -\text{Cos } (A + B) - (1 - \text{Cos } c). \text{Sin } A. \text{Sin } B;$$

$$\beta) \text{ Wenn } c \text{ stumpf:}$$

$$\text{Cos } C = -\text{Cos } (A - B) + (1 + \text{Cos } c). \text{Sin } A. \text{Sin } B.$$

$$5) \text{ Wenn der gefuchte Winkel } C \text{ klein ist, und für den Tafel-Halbmesser } = r:$$

$$\text{Tang } u = r \left(\frac{\text{Sin } \frac{1}{2} c. \text{Sin } \frac{1}{2} c. \text{Sin } A. \text{Sin } B}{\text{Cos } \frac{1}{2} (A + B). \text{Cos } \frac{1}{2} (A + B)} \right);$$

$$\text{Sin } \frac{1}{2} C = \frac{r. \text{Cosin } \frac{1}{2} (A + B)}{\text{Cosin } u}.$$

6) Durch das Ergänzungsdreieck. Man sehe Tafel I. Figur IX.

$$\begin{array}{l} \alpha = 180^\circ - A \\ \beta = 180^\circ - B \\ \gamma = 180^\circ - C \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Hieraus nach Fall 4:} \\ \gamma; \text{ und dies giebt:} \\ C = 180^\circ - \gamma. \end{array} \right\}$$

Eben so Fall 4 durch Fall 6:

$$\begin{array}{l} A = 180^\circ - a \\ B = 180^\circ - b \\ \gamma = 180^\circ - C \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Hieraus nach Fall 6:} \\ \gamma; \text{ und dies giebt:} \\ c = 180^\circ - \gamma. \end{array} \right\}$$

Fall 7.

Gegeben.

2 Seiten und ein gegenüberstehender Winkel,
oder a , b und A .

Gesucht.

Der Winkel, welcher der andern gegebenen Seite
gegenübersteht, oder B .

Formel.

$$\sin B = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin a}$$

Der gefuchte Winkel B ist zweydeutig, wenn folgende Regel nicht die Ungewissheit aufhebt:

Je nachdem $a + b >$ oder $<$ oder $= 180^\circ$,
ist auch $A + B >$ oder $<$ oder $= 180^\circ$.

Oder:

$\frac{a + b}{2}$ und $\frac{A + B}{2}$ müssen allezeit gleichartig seyn.

Man kann auch folgende Regel geben, um die Ungewissheit wegzubringen:

B ist mit b gleichartig, wenn a weder $< b$, noch $> 180^\circ - b$ ist.

*Fall 8.**Gegeben.*

2 Seiten und ein gegenüberstehender Winkel, oder
a, b und A.

Gesucht.

Der Winkel der von den gegebenen Seiten a, b
eingeschlossen wird, oder C.

Formel.

$$\sin B = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin a};$$

$$\tan \frac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b) \cdot \cot \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)}.$$

Bleibt bey B nach Fall 7 eine Ungewissheit, so
wird auch C zweifelhaft seyn.

Eine 2te Auflösungsart:

$$\cot u = \tan A \cdot \cos b;$$

$$\cos z = \frac{\cos u \cdot \tan b}{\tan a};$$

$$u \pm z = C.$$

Man sehe die Anmerkung auf pag. 88.

*Fall 9.**Gegeben.*

2 Seiten und ein gegenüberstehender Winkel, oder
a, b und A.

Gesucht.

Die 3te Seite, oder c.

Formel.

$$\sin B = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin a};$$

$$\tan \frac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2} (A + B) \cdot \tan \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} (A - B)}.$$

Bleibt bey B nach Fall 7 eine Ungewissheit, so wird
auch c zweifelhaft.

Eine 2te Auflösungsart:

$$\text{Tang } u = \text{Cosin } A \cdot \text{Tang } b;$$

$$\text{Cosin } z = \frac{\text{Cosin } u \cdot \text{Cosin } a}{\text{Cosin } b};$$

$$u \pm z = c.$$

Man sehe die folgende Anmerkung.

Anmerkung zur 2ten Auflösungsart bey Fall 8 und 9.

Man nimmt die Summe $u + z$, wenn die Winkel A und B, die den gegebenen Seiten a und b gegenüberstehen, gleichartig sind; im gegenseitigen Falle den Unterschied $u - z$.

Daher sind diese beyden Fälle 8 und 9 zweydeutig, wenn im Fall 7 bey B eine Zweydeutigkeit bleibt. Jedoch, wenn auch B ungewiss ist, so wird oftmals durch folgende Regel die Art $\left. \begin{array}{l} \text{des Winkels } C, \text{ Fall 8} \\ \text{der Seite } c, \text{ Fall 9} \end{array} \right\}$ bestimmt werden können:

Wenn die Summe $u + z > 180^\circ$, so ist der Unterschied

$$u - z = \left\{ \begin{array}{l} C \text{ Fall 8} \\ c \text{ Fall 9} \end{array} \right\}; \text{ und wenn } u - z \text{ negativ, oder } z > u, \text{ ist}$$

$$\text{die Summe } u + z = \left\{ \begin{array}{l} C \text{ Fall 8} \\ c \text{ Fall 9} \end{array} \right\}.$$

Fall 10.

Gegeben.

2 Winkel und eine gegenüberstehende Seite, oder A, B und a

Gesucht.

Die dem andern gegebenen Winkel gegenüberstehende Seite, oder b

Formel.

$$\text{Sin } b = \frac{\text{Sin } B \cdot \text{Sin } a}{\text{Sin } A}$$

Die gefuchte Seite b ist zweydeutig, wenn folgende Regel nicht die Art derselben bestimmt:

Ist $A + B >$ oder $<$ oder $= 180^\circ$, so ist auch $a + b >$ oder $<$ oder $= 180^\circ$.

Es läßt sich auch die Regel so geben:

$\frac{A+B}{2}$ und $\frac{a+b}{2}$ müssen allezeit gleichartig seyn.

Es dient auch folgende Regel, die Zweydeutigkeit aufzuheben:

b ist mit B gleichartig, wenn A weder $< B$ noch $> 180^\circ - B$ ist.

Fall 11.

Gegeben.

2 Winkel und eine gegenüberstehende Seite, oder
 A , B und a

Gesucht.

Die den gegebenen Winkeln A und B anliegende Seite,
oder c

Formel.

$$\sin b = \frac{\sin B \cdot \sin a}{\sin A};$$

$$\text{Tang } \frac{1}{2} c = \frac{\text{Cosin } \frac{1}{2} (A+B) \cdot \text{Tang } \frac{1}{2} (a+b)}{\text{Cosin } \frac{1}{2} (A-B)}.$$

c ist zweydeutig, wenn b nach Fall 10 es ist.

Eine andere Auflösung:

$$\text{Tang } u = \text{Tang } a \cdot \text{Cosin } B;$$

$$\sin z = \frac{\sin u \cdot \text{Tang } B}{\text{Tang } A};$$

$$u + z = c.$$

Man sehe die Anmerkung pag. 90.

Fall 12.

Gegeben.

2 Winkel und eine gegenüberstehende Seite, oder
 A , B und a

Gesucht.

Der dritte Winkel oder C

Formel.

$$\sin b = \frac{\sin B \cdot \sin a}{\sin A};$$

$$\tan \frac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b) \cdot \cot \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)}.$$

C ist zweydeutig, wenn b nach Fall 10 zweydeutig bleibt.

Eine andere Auflösung:

$$\cot u = \cos a \cdot \tan B;$$

$$\sin z = \frac{\sin u \cdot \cos A}{\cos B};$$

$$u \pm z = C.$$

Man sehe die folgende Anmerkung.

Anmerkung zur andern Auflösung des Falles 11 und 12.

Man nimmt die Summe $u + z$, wenn die gegebenen Winkel A und B gleichartig sind; im entgegengesetzten Falle den Unterschied $u - z$.

Da jedoch z durch den Sinus gefunden wird, und also zwey Werthe hat; so ist allezeit der größte Werth von z zu verwerfen, wenn selbiger die Summe $u + z > 180^\circ$, oder den Unterschied $u - z$ negativ giebt. Ueberhaupt:

Je nachdem a und b gleichartig oder ungleichartig sind, sind es auch u und z; oder mit andern Worten; es verhalten sich die Arten von u und z gegeneinander, wie die von a und b. Daher sind diese zwey Fälle 11 und 12 schlechterdings zweydeutig, wenn es Fall 10 ist.

I. Das Ergänzungsdreieck dient ebenfalls

Fall 10, 11, 12, durch

Fall 7, 8, 9; und umgekehrt:

Fall 7, 8, 9, durch

Fall 10, 11, 12 zu berechnen.

II. Endlich kann die Formel bey Fall 11 und 12
für $\text{Tang } \frac{1}{2} c$ und $\text{Tang } \frac{1}{2} C$

auch besonders gebraucht werden, *wenn zwey Seiten
nebst den beyden gegenüberstehenden Winkeln gegeben
sind, die dritte Seite und den dritten Winkel zu finden.*

Flächeninhalt eines Kugeldreiecks.

I. Die Fläche eines Kugeldreiecks wird gefunden, wenn
man 180° von der Summe der drey Winkel subtrahirt,
und den Rest mit dem Halbmesser der Kugel multi-
pliziert. Oder in Zeichen ausgedrückt:

$$D = A + B + C - 180^\circ;$$

$$x = D \cdot R$$

Bey Berechnung dieser Gleichung ist zu merken,
dass die beyden Faktoren D und R gleichartige Grö-
ssen seyn müssen. Nämlich:

Verlangt man die Fläche in Graden } so nimmt man
oder in Minuten } A, B, C
oder in Sekunden; } das ist

D ebenfalls in Graden } an, und für } R den in Graden
oder in Minuten } den Kugel- } oder in Minuten
oder in Sekunden } halbmesser } oder in Sekunden

ausgedrückten, d. i. R° }
oder R' } wovon die Logarithmen
oder R'' ; } folgende sind:

$$\text{Log } R^\circ = 1,758\,1226\,3$$

$$\text{Log } R' = 3,536\,2738\,8$$

$$\text{Log } R'' = 5,314\,4251\,3$$

Will man des Dreiecks Oberfläche in Zollen } haben, so
 oder Fussen } nimmt
 etc. } man R

in Zollen } und reduzirt auch D auf Zolle } durch die
 oder Fussen } oder Fusse } Propor-
 etc. } etc. } tion

$$R^{\circ} \text{ oder } R' \text{ oder } R'' : D^{\circ} \text{ oder } D' \text{ oder } D'' \\
= R \text{ in Zollen } : D \text{ in Zollen} \\
\text{oder Fussen } \quad \text{oder Fussen} \\
\text{etc.} \quad \text{etc.}$$

Nach dieser Reduktion bedient man sich allezeit der Logarithmen der natürlichen Zahlen, und so findet sich auch durch sie die Fläche x.

II. Ist das Kugeldreieck *rechtwinklicht* oder $A = 90^{\circ}$; so ist seine Oberfläche

$$x = (B + C - 90^{\circ}) \cdot R$$

III. Wenn es *gleichschenklicht* oder $A = C$ ist, so wird

$$x = (2 A + B - 180^{\circ}) \cdot R$$

IV. Ist es *gleichseitig* d. i. $A = B = C$; so hat man

$$x = (3 A - 180^{\circ}) \cdot R$$

Und wenn bey dem gleichseitigen Dreieck statt des Winkels A, die Seite a gegeben ist, so ergiebt sich daraus A durch die Gleichung:

$$\sin \frac{1}{2} A = \frac{1}{2 \cdot \cos \frac{1}{2} a}$$

A n w e n d u n g
der vorhergehenden
trigonometrischen Formeln
a u f
A s t r o n o m i e.

A n w e n d u n g

der vorstehenden

trigonometrischen Formeln

A l l g e m e i n e

Rechtwinklichtes
Kugeldreieck, dessen Seiten, Länge, Abweichung
und gerade Aufsteigung der Sonne sind.

Es bedeute in Tafel I. Figur X
 λ die Länge der Sonne;
 δ Abweichung der Sonne;
 α gerade Aufsteigung der Sonne;
 θ Schiefe der Ekliptik;
 ϕ den Winkel der Ekliptik mit der Mittagsfläche;
 so geben die obigen *Formeln zur Auflösung rechtwinklicher Kugeldreiecke* in Tafel I folgende 10 Gleichungen zur Vergleichung der Theile dieses Dreiecks untereinander :

- I. $\sin \delta = \sin \lambda \cdot \sin \theta$
- II. $\cotang \lambda = \cotang \alpha \cdot \cosin \theta$
- III. $\tang \delta = \tang \theta \cdot \sin \alpha$
- IV. $\cosin \lambda = \cosin \alpha \cdot \cosin \delta$
- V. $\cotang \phi = \cosin \lambda \cdot \tang \theta$
- VI. $\sin \alpha = \sin \lambda \cdot \sin \phi$
- VII. $\tang \delta = \tang \lambda \cdot \cosin \phi$
- VIII. $\tang \alpha = \tang \phi \cdot \sin \delta$
- IX. $\cosin \phi = \cosin \alpha \cdot \sin \theta$
- X. $\cosin \theta = \cosin \delta \cdot \sin \phi$

Da nun bey diesen 10 Gleichungen aus zweyen allemal das dritte gefunden wird, so kommen überhaupt 30 Aufgaben bey gegenwärtigem Dreiecke vor, die nebst den Auflösungen folgende sind:

Aufgabe	Gegeben.	Gesucht.	Formel.
1	λ, θ d. i. Länge der Sonne und Schiefe der Ekliptik.	δ d. i. Ab- weichung der Sonne.	$\sin \delta^* = \sin \lambda \cdot \sin \theta^*$ oder $\sin \delta^* = \frac{1}{2} \cos(\lambda - \theta^*) - \frac{1}{2} \cos(\lambda + \theta^*)$
2	δ, θ	λ	$\sin \lambda = \frac{\sin \delta}{\sin \theta}$
3	λ, δ	θ	$\sin \theta = \frac{\sin \delta}{\sin \lambda}$
4	α, θ d. i. gerade Aufsteigung der Sonne u. Schie- fe der Ekliptik.	λ d. i. Länge der Sonne.	$\text{Tang } \lambda = \frac{\text{Tang } \alpha}{\text{Cosin } \theta}$
5	λ, θ d. i. Länge der Sonne und Schiefe der Ekliptik.	α d. i. gerade Aufsteigung der Sonne.	$\text{Tang } \alpha = \text{Tang } \lambda \cdot \text{Cosin } \theta$
6	α, λ	θ	$\text{Cosin } \theta = \frac{\text{Tang } \alpha}{\text{Tang } \lambda}$
7	α, θ d. i. gerade Aufsteigung der Sonne u. Schie- fe der Ekliptik.	δ d. i. Ab- weichung der Sonne.	$\text{Tang } \delta = \sin \alpha \cdot \text{Tang } \theta$
8	δ, θ	α	$\sin \alpha = \frac{\text{Tang } \delta}{\text{Tang } \theta}$
9	α, δ	θ	$\text{Tang } \theta = \frac{\text{Tang } \delta}{\sin \alpha}$
10	α, δ	λ	$\text{Cosin } \lambda = \text{Cosin } \alpha \cdot \text{Cosin } \delta$
11	λ, δ	α	$\text{Cosin } \alpha = \frac{\text{Cosin } \lambda}{\text{Cosin } \delta}$
12	λ, α	δ	$\text{Cosin } \delta = \frac{\text{Cosin } \lambda}{\text{Cosin } \alpha}$

<i>Auf- gabe</i>	<i>Gegeben.</i>	<i>Gesucht.</i>	<i>Formel.</i>
13	λ, θ d. i. Länge der Sonne und Schiefe der Ekliptik.	ϕ d. i. Winkel der Ekliptik mit der Mittags- fläche.	$\text{Cotang } \phi = \text{Cosin } \lambda \cdot \text{Tang } \theta$
14	λ, ϕ	θ	$\text{Tang } \theta = \frac{\text{Cotang } \phi}{\text{Cosin } \lambda}$
15	θ, ϕ	λ	$\text{Cosin } \lambda = \frac{\text{Cotang } \phi}{\text{Tang } \theta}$
16	λ, ϕ	α	$\text{Sin } \alpha = \text{Sin } \lambda \cdot \text{Sin } \phi$
17	α, ϕ	λ	$\text{Sin } \lambda = \frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Sin } \phi}$
18	α, λ	ϕ	$\text{Sin } \phi = \frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Sin } \lambda}$
19	λ, ϕ	δ	$\text{Tang } \delta = \text{Tang } \lambda \cdot \text{Cosin } \phi$
20	δ, ϕ	λ	$\text{Tang } \lambda = \frac{\text{Tang } \delta}{\text{Cos } \phi}$
21	λ, δ	ϕ	$\text{Cosin } \phi = \frac{\text{Tang } \delta}{\text{Tang } \lambda}$
22	δ, ϕ	α	$\text{Tang } \alpha = \text{Sin } \delta \cdot \text{Tang } \phi$
23	α, ϕ	δ	$\text{Sin } \delta = \frac{\text{Tang } \alpha}{\text{Tang } \phi}$
24	α, δ	ϕ	$\text{Tang } \phi = \frac{\text{Tang } \alpha}{\text{Sin } \delta}$
25	α, θ	ϕ	$\text{Cosin } \phi = \text{Cosin } \alpha \cdot \text{Sin } \theta$
26	α, ϕ	θ	$\text{Sin } \theta = \frac{\text{Cosin } \phi}{\text{Cosin } \alpha}$
27	θ, ϕ	α	$\text{Cosin } \alpha = \frac{\text{Cosin } \phi}{\text{Sin } \theta}$

Aufgabe	Gegeben.	Gesucht.	Formel.
28	δ, ϕ	θ	$\text{Cosin } \theta = \text{Cosin } \delta \cdot \text{Sin } \phi$
29	δ, θ	ϕ	$\text{Sin } \phi = \frac{\text{Cosin } \theta}{\text{Cosin } \delta}$
30	θ, ϕ	δ	$\text{Cosin } \delta = \frac{\text{Cosin } \theta}{\text{Sin } \phi}$

Beyspiele.

I.

*Trigonometrische Berechnung der Abweichung der Sonne
= δ aus ihrer Länge = λ und der dermaligen Schiefe
der Ekliptik = θ .*

Es sey, nach Band I. dieses Handbuchs, § 12:
Seite 32:

$$\lambda = 3 \text{ Z. } 3^{\circ} 29' 50''$$

$$= 93. 29. 50.$$

$$\theta = 23. 27. 58.$$

so ist zufolge der vorigen ersten Aufgabe, Formel I:

$$\sin \delta = \sin 93^{\circ} 29' 50'' \cdot \sin 23^{\circ} 27' 58''$$

$$= + \cos 3^{\circ} 29' 50'' \cdot \sin 23^{\circ} 27' 58''$$

also δ positiv oder die Abweichung Nördlich.

$$\log \cos 3^{\circ} 29' 50'' = 9,999 1905$$

$$+ \log \sin 23^{\circ} 27' 58'' - \log r = 9,600 1084 - 10$$

$$\log \sin \delta = 9,599 2989$$

$$\delta = 23^{\circ} 25' 11'' \text{ Nö.}$$

wie am ang. O.

Nach der zweyten Formel wird die Rechnung so
geführt:

$$\lambda = 93^{\circ} 29' 50''$$

$$\theta = 23. 27. 58.$$

$$\lambda - \theta = 70. 1. 52.$$

$$\lambda + \theta = 116. 57. 48.$$

$$\cos (\lambda + \theta) = - \cos 63^{\circ} 2' 12''$$

Demnach

$$\sin \delta = \frac{1}{2} \cos 70^{\circ} 1' 52'' + \frac{1}{2} \cos 63^{\circ} 2' 12''$$

$$\cos 70^{\circ} 1' 52'' = 0,341 5099; \text{ Hälfte} = 0,170 7549$$

$$\cos 63^{\circ} 2' 12'' = 0,453 4203; \text{ Hälfte} = 0,226 7101$$

$$\sin \delta = 0,397 4650$$

$$\delta = 23^{\circ} 25' 11'' \text{ Nö.}$$

wie vorher.

Die gerade Aufsteigung der Sonne = α , aus der Länge der Sonne = λ und der Schiefe der Ekliptik = θ .

Da sich gerade Aufsteigung und Länge der Sonne allezeit in einerley Quadranten befinden, so braucht man hier nur ein rechtwinklichtes Kugeldreieck aufzulösen, dessen Seiten kleiner als 90° sind; wenn man nemlich statt der gegebenen Länge der Sonne = λ , ihren Abstand, in der Ekliptik gezählet, vom nächsten Aequinoktialpunkte = 1, in der Formel der 5ten Aufgabe gebraucht, so giebt selbige den Abstand der Sonne, im Aequator gezählet, von ebendemselben nächsten Aequinoktialpunkte = a . Je nachdem nun λ im { ersten } Quadranten ist, { zweyten } wird { dritten } { vierten }

$$\alpha = \left\{ \begin{array}{l} a \\ 180^\circ - a \\ 180^\circ + a \\ 360^\circ - a \end{array} \right\} \text{ feyn.}$$

Rechnung für das Beyspiel, Handbuch. Band I. §. 12.
Seite 32.

$$\begin{array}{rcl} \lambda = 3 \text{ Z. } 3^\circ 29' 50'' & | & 180^\circ = 179^\circ 59' 60'' \\ = 0. & 93. & 29. & 50. & | & - \lambda = 93. & 29. & 50. \\ \theta = 0. & 23. & 27. & 58. & | & 1 = 86. & 30. & 10. \\ & & & & & \log \text{ Tang } 1 = 11,2138596 \\ & & & & & + \log \text{ Cosin } \theta = 9,9625094 \\ & & & & & \log \text{ Tang } a = 11,1763690 \\ & & & & & a = 86^\circ 11' 18'' \\ & & & & & \text{subtrahirt von } 180^\circ = 179. & 59. & 60. \\ & & & & & \alpha = 93. & 48. & 42. \end{array}$$

III.

Den Winkel der Ekliptik mit dem Meridian $= \phi$ vermittlest
der Länge der Sonne $= \lambda$ und der Schiefe der Ekliptik $= \theta$
zu finden

Dient die Formel der Aufgabe 13, wobey man zu be-
merken hat, daß dieser Winkel negativ oder *westlich* ist,
wenn die Sonne in den niedersteigenden Zeichen d. i.
im 3, 4, 5, 6, 7, 8ten Zeichen, oder im 2ten und 3ten
Quadranten der Ekliptik ist; positiv oder *östlich* wenn
 λ in den 1sten oder 4ten Quadranten fällt.

Das in meinem Handbuch, Band I. §. 10. Seite 31
vorkommende Beyspiel wird nach erwähnter Formel
so berechnet:

$$\lambda = 3 \text{ Z. } 3^{\circ} 29' 50''$$

$$= 93. 29. 50.$$

$$\theta = 23. 27. 58.$$

$$\text{Cosin } \lambda = - \text{Sin } 3^{\circ} 29' 50''$$

folglich

$$\text{Cotang } \phi \text{ westl.} = \text{Sin } 3^{\circ} 29' 50'' \cdot \text{Tang } \theta$$

$$\log \text{Sin } 3^{\circ} 29' 50'' = 8,785\,3309$$

$$+ \log \text{Tang } \theta = 9,637\,5990$$

$$\log \text{Cotang } 88^{\circ} 28' 59'' = 8,422\,9299$$

$$\phi = 88^{\circ} 28' 59'' \text{ westl.}$$

Z w e y A u f g a b e n

den halben Tagebogen der Sonne oder
eines Sterns zu finden.

E r s t e A u f g a b e.

Aus Polhöhe eines Orts, Abweichung der Sonne, und Horizontal - Refraktion; die Tageslänge, folglich auch Auf- und Untergang der Sonne zu berechnen.

Es sey in Tafel I. Figur XI.

H Z P R der Mittagskreis, welcher also durch das Zenit in Z, und durch den Pol in P geht;

H O R der Horizont;

A D T der Aequator;

so ist der Bogen P S D der vierte Theil $= 90^\circ$, eines Abweichungskreises, der durch die Sonne in S gelegt worden; und

Z O S ein Bogen eines Scheitelkreises, der gleichfalls durch die Sonne geht, welche noch um einen Bogen von etwa $32' 54''$ unter dem Horizonte stehen soll, wenn sie des Morgens sichtbar zu werden anfängt, weil die Horizontal - Refraktion O S beynahe so viel beträgt.

Demzufolge wird der Bogen A D des Aequators die Hälfte des Tages bezeichnen, und die Zeit geben, welche die Sonne braucht, ihn selbst oder einen ähnlichen Bogen eines seiner Parallelkreise, von ihrem Aufgange an bis zu ihrem Stande im Mittagskreise zu durchlaufen.

Dieser Bogen des Aequators oder eines Parallels heist bekanntlich der *halbe Tagebogen*.

Es kommt also alles darauf an, diesen halben Tagbogen AD zu finden; er ist nemlich das Maas des Winkels APD oder ZPS , dessen Scheitel oder Spitze im Pole ist.

Zu dem Ende betrachte man das Kugeldreieck ZPS , dessen drey Seiten nach dem Inhalte der Aufgabe bekannt sind, nemlich

1) PZ ; dieser Bogen ist die Ergänzung der Polhöhe PR zu 90° , weil der Bogen ZPR , vom Zenit bis zum Horizonte, ein Quadrant ist.

2) PS ; dies ist die Ergänzung der Abweichung DS der Sonne, weil der Bogen PD zwischen dem Pole und Aequator, 90° beträgt. Hierbey wird aber der *Nordpol über* dem Horizonte angenommen; wenn nun in diesem Fall die Sonne eine Abweichung nach dem unsichtbaren oder Südpole d. i. eine Südliche Abweichung hätte, so würde, statt des vorigen PS , der Bogen Ps zu nehmen seyn, welcher die Summe von 90° und der Abweichung ist.

3) ZS ; diese Seite ist die Summe von 90° (des zwischen dem Zenit und Horizonte enthaltenen Bogens ZO des Höhenkreises) und der Horizontal-Refraktion OS .

Nennt man nun:

die Nörliche		z. B.
Polhöhe $= e$		$= 49^\circ$
die Abweichung		
der Sonne $= \delta$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nö. +} \\ \text{Sü. -} \end{array} \right.$	$= 20^\circ \left\{ \begin{array}{l} \text{Nö.} \\ \text{Sü.} \end{array} \right.$
die Horizontal-		
Refraktion $= \epsilon$		$= 0^\circ 32' 54''$

so ist

$PZ = 90^\circ - e$	$= 41^\circ$	
$PS = 90^\circ - \delta$	$= \left\{ \begin{array}{l} 70^\circ \text{ bey Nö. Abw.} \\ 110^\circ \text{ bey Sü. Abw.} \end{array} \right.$	
$ZS = 90^\circ + \epsilon$	$= 90^\circ 32' 54''$	

Kennt man aber die drey Seiten eines Kugeldreiecks, so lassen sich daraus die Winkel finden, und die hieher gehörigen Rechnungsarten, num. 1) 2) und 3) aus Fall 1 der *Auflösung schiefwinklchter Kugeldreiecke* will ich nunmehr auf die Auffuchung des Winkels Z P S oder A P D anwenden, welcher mit dem Bogen A D einerley ist. Wird alsdann A D in Zeit verwandelt, 15° auf eine Stunde gerechnet, so bekommt man die halbe Tageslänge, mithin Auf- und Untergang der Sonne.

<i>Was am ang. O. x</i>	a	b	c	Man sehe hiezu Tafel Figur XII.
<i>ist gegenwärtig ZPS</i>	$ZS =$	$ZP =$	$SP =$	
	$90^\circ + \epsilon$	$90^\circ - \epsilon$	$90^\circ - \delta$	

Setzt man daher diese Werthe für a , b , c in die Formeln, so geben selbige nach gehöriger Reduktion, $\frac{1}{2} x$ oder $\frac{1}{2} A D$ d. i. die Hälfte des gesuchten halben Tagebogens, wie in folgender Tafel zu sehen ist.

Tafel zur Ersten Aufgabe.

Gegeben.

$\epsilon, \delta, \varrho$ d. i. Nördliche Polhöhe, Abweichung
der Sonne oder eines Sterns $\begin{cases} \text{Nö.} + * \\ \text{Sü.} - \end{cases}$
und Horizontal-Refraktion.

* Nemlich wenn die Abweichung Nördlich ist, so ist δ positiv; wenn sie aber Südlich ist, wird δ negativ angenommen.

Gesucht.

x oder der halbe Tagebogen.

Formel.

$$u = \frac{90^\circ - \delta - \epsilon}{2}$$

$$1) \sin \frac{1}{2} x = r \left(\frac{\sin(u + \frac{1}{2} \varrho + \epsilon) \cdot \sin(u + \frac{1}{2} \varrho + \delta)}{\cos \epsilon \cdot \cos \delta} \right)$$

$$2) \cos \frac{1}{2} x = r \left(\frac{\cos(u + \frac{1}{2} \varrho) \cdot \sin(u - \frac{1}{2} \varrho)}{\cos \epsilon \cdot \cos \delta} \right)$$

$$3) \tan \frac{1}{2} x = r \left(\frac{\sin(u + \frac{1}{2} \varrho + \epsilon) \cdot \sin(u + \frac{1}{2} \varrho + \delta)}{\cos(u + \frac{1}{2} \varrho) \cdot \sin(u - \frac{1}{2} \varrho)} \right)$$

Anmerkung.

Eines Verfahrens wie bey dieser ersten Aufgabe pflegt man sich auch zu bedienen, die wahre Zeit für eine gewisse bekannte Sonnenhöhe zu bestimmen, wobey man ebenfalls die Abweichung der Sonne und die Breite des Orts als bekannt annimmt:

Denn in dem schiefwinklichten Kugeldreieck ZPS, Tafel II. Figur XIII. ist die Seite ZS welche nunmehr kleiner als 90° oder als ZO ist, die Ergänzung der Sonnenhöhe $SO = \eta$ zu 90° ; also kennt man die drey Seiten des Dreiecks ZPS, nemlich

$$\begin{aligned} PZ &= 90^\circ - \varepsilon \\ PS &= 90^\circ - \delta \\ ZS &= 90^\circ - \eta \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{Nö. Abw. +} \\ \text{Sü. Abw. -} \end{array} \right.$$

woraus sich der Winkel am Pole, ZPS, so wie vorher finden läßt. Es ist aber das Maas dieses Winkels der Bogen AD des Aequators, der in Stunden, Minuten und Sekunden verwandelt, 15° auf 1 St. gerechnet, angiebt: wieviel Zeit von dem Augenblicke an für welchen man die Höhe der Sonne weis, bis zum wahren Mittage verfließt, wenn man für den Vormittag rechnet; oder wie lange es dauert vom Mittage bis zur Zeit der gegebenen Sonnenhöhe, wenn es Nachmittage ist. Doch hievon in der Folge ausführlicher.

Uebrigens kann man diese Aufgabe, den Stundenwinkel $ZPS = x$ für eine gemessene wahre Höhe η zu finden, auch nach den vorhergehenden drey Formeln, welche den halben Tagebogen mit Betrachtung der Horizontal-Refraktion geben, auflösen, wenn man darin $\varepsilon = -\eta$ setzt. Dadurch verwandeln sich die beyden ersten Formeln zu gegenwärtigem Zweck in folgende:

$$u = \frac{90^\circ - \delta - \varepsilon}{2}$$

$$1) \quad \sin \frac{1}{2} x = r \left(\frac{\sin(u - \frac{1}{2}\eta + \varepsilon) \cdot \sin(u - \frac{1}{2}\eta + \delta)}{\cos \varepsilon \cdot \cos \delta} \right)$$

$$2) \quad \cos \frac{1}{2} x = r \left(\frac{\cos(u - \frac{1}{2}\eta) \cdot \sin(u + \frac{1}{2}\eta)}{\cos \varepsilon \cdot \cos \delta} \right)$$

Rechnungsbeyspiele zu der Aufgabe den halben Tagebogen
mit Betrachtung der Horizontal-Refraktion zu finden.

Beyspiel 1.

$$\varepsilon = 49^{\circ} \ 0' \ 0''$$

$$\delta = 20^{\circ} \text{ Nördlich, d. i. } = + 20^{\circ}$$

$$\varphi = 0^{\circ} \ 32' \ 54''$$

Rechnung nach Formel 1.

	$90^{\circ} =$	$90^{\circ} \ 0' \ 0''$
	$-\delta =$	$-20. \ 0. \ 0.$
	$90^{\circ} - \delta =$	$70. \ 0. \ 0.$
	$-\varepsilon =$	$49. \ 0. \ 0.$
	$90^{\circ} - \delta - \varepsilon =$	$21. \ 0. \ 0.$
	Hälfte oder $u =$	$10. \ 30. \ 0.$
	$+\frac{1}{2}\varphi =$	$0. \ 16. \ 27.$
	$+\varepsilon =$	$49. \ 0. \ 0.$
	$u + \frac{1}{2}\varphi + \varepsilon =$	$59. \ 46. \ 27.$
	$u + \frac{1}{2}\varphi =$	$10. \ 46. \ 27.$
	$+\delta =$	$+ 20. \ 0. \ 0.$
	$u + \frac{1}{2}\varphi + \delta =$	$30. \ 46. \ 27.$
	$20 + \log \sin (u + \frac{1}{2}\varphi + \varepsilon) =$	$29,936 \ 5378$
	$+\log \sin (u + \frac{1}{2}\varphi + \delta) =$	$9,708 \ 9777$
	Summe =	$39,645 \ 5155$
	$-\log \cos \varepsilon =$	$9,816 \ 9429$
	Rest =	$29,828 \ 5726$
	$-\log \cos \delta =$	$9,972 \ 9858$
	$2 \cdot \log \sin \frac{1}{2}x =$	$19,855 \ 5868$
	$\log \sin \frac{1}{2}x =$	$9,927 \ 7934$
	$\frac{1}{2}x =$	$57^{\circ} \ 52' \ 5''$
	$x =$	$115. \ 44. \ 10.$
	$=$	$7 \text{ St. } 42. \ 56. \text{ der gesuchte}$
		halbe Tagebogen.

Bey der Sonne giebt selbiger sogleich ihren Untergang
um 7 Uhr 42' 56"; der Aufgang wird erhalten, wenn

man diese 7^h 42' 56" von 12 St. 0' 0" subtrahirt, also um 4 Uhr 17' 4"; 2x oder 15 St. 25' 52" ist die Tageslänge.

Bey einem Sterne aber $\left\{ \begin{array}{l} \text{subtrahirt} \\ \text{addirt} \end{array} \right\}$ man den gefundenen halben Tagebogen $\left\{ \begin{array}{l} \text{von} \\ \text{zu} \end{array} \right\}$ der Culminationszeit des Sterns; $\left\{ \begin{array}{l} \text{der Rest} \\ \text{die Summe} \end{array} \right\}$ giebt den $\left\{ \begin{array}{l} \text{Aufgang} \\ \text{Untergang} \end{array} \right\}$ des Sterns.

Rechnung nach Formel 2.

u	$=$	10° 30' 0"
$\frac{1}{2} \epsilon$	$=$	0. 16. 27.
$u + \frac{1}{2} \epsilon$	$=$	10. 46. 27.
$u - \frac{1}{2} \epsilon$	$=$	10. 13. 33.
$20 + \log \text{Cosin}(u + \frac{1}{2} \epsilon)$	$=$	29,992 2758
$+ \log \text{Sin}(u - \frac{1}{2} \epsilon)$	$=$	9,249 2680
Summe	$=$	39,241 5438
$- \log \text{Cosin } \epsilon$	$=$	9,816 9429
Rest	$=$	29,424 6009
$- \log \text{Cosin } \delta$	$=$	9,972 9858
$2 \cdot \log \text{Cosin } \frac{1}{2} x$	$=$	19,451 6151
$- \log \text{Cosin } \frac{1}{2} x$	$=$	9,725 8075
$\frac{1}{2} x$	$=$	57° 52' 5"
		wie vorher.

Beispiel 2.

$$\varepsilon = 49^{\circ} \ 0' \ 0''$$

$$\delta = 20. \text{ Südlich} = -20^{\circ}$$

$$\varphi = 0. \ 32. \ 54.$$

Rechnung nach Formel 1.

$$\begin{array}{r} 90^{\circ} = 90^{\circ} \ 0' \ 0'' \\ - \delta = +20. \ 0. \ 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 90^{\circ} - \delta = 110. \ 0. \ 0. \\ - \varepsilon = 49. \ 0. \ 0. \end{array}$$

$$90^{\circ} - \delta - \varepsilon = 61. \ 0. \ 0.$$

$$u = 30. \ 30. \ 0.$$

$$+ \frac{1}{2} \varphi = 0. \ 16. \ 27.$$

$$+ \varepsilon = 49. \ 0. \ 0.$$

$$u + \frac{1}{2} \varphi + \varepsilon = 79. \ 46. \ 27.$$

$$u + \frac{1}{2} \varphi = 30. \ 46. \ 27.$$

$$+ \delta = -20. \ 0. \ 0.$$

$$u + \frac{1}{2} \varphi + \delta = 10. \ 46. \ 27.$$

$$20 + \log \sin (u + \frac{1}{2} \varphi + \varepsilon) = 29,993 \ 0461$$

$$+ \log \sin (u + \frac{1}{2} \varphi + \delta) = 9,271 \ 6985$$

$$\text{Summe} = 39,264 \ 7446$$

$$- \log \cos \varepsilon = 9,816 \ 9429$$

$$\text{Rest} = 29,447 \ 8017$$

$$- \log \cos \delta = 9,972 \ 9858$$

$$2 \cdot \log \sin \frac{1}{2} x = 19,474 \ 8159$$

$$\log \sin \frac{1}{2} x = 9,737 \ 4079$$

$$\frac{1}{2} x = 33^{\circ} \ 6' \ 42''$$

$$x = 66. \ 13. \ 24.$$

$$66^{\circ} = 4 \text{ St. } 24. \ 0.$$

$$13' = 0 \ 0. \ 52.$$

$$24' = 0 \ 0. \ 1,6.$$

$$x = 4. \ 24. \ 53,6.$$

welcher letztere in Zeit, 15° auf 1 Stunde gerechnet, verwandelt, die halbe Tageslänge, folglich auch den Auf- und Untergang der Sonne ohne Betracht der Strahlenbrechung giebt.

III. Es wird aber die hiehergehörige Formel 5 für gegenwärtigen Fall so eingerichtet:

$$\begin{array}{l} \text{Was Tafel 1. Formel 5: } a \quad \quad \quad c \quad \quad \quad B \\ \text{ist hier: } PS \quad \quad \quad PR \quad \quad \quad SPR \\ \quad \quad \quad = 90^\circ - \delta \quad \quad \quad = \varepsilon \quad \quad \quad = 180^\circ - \tau \end{array}$$

Also

$$1) \cos(180^\circ - \tau) = \tan \varepsilon \cdot \tan \delta$$

wenn die Abweichung der Sonne Nördlich ist.

Oder auch aus Tafel 4. Formel 5:

$$\tan \frac{1}{2}(180^\circ - \tau) = r \left(\frac{\sin(90^\circ - \delta - \varepsilon)}{\sin(90^\circ - \delta + \varepsilon)} \right)$$

und hieraus folgt eine zweyte Formel für den halben Tagebogen

$$2) \tan \frac{1}{2} \tau = r \left(\frac{\cos(\varepsilon - \delta)}{\cos(\varepsilon + \delta)} \right)$$

wenn die Abweichung der Sonne Nördlich ist.

IV. Hat bey uns die Sonne eine Südliche Abweichung, so ist $Ps = Pd + ds$ oder $90^\circ + \delta$ d. i. der Summe von 90° und der Abweichung der Sonne; alsdann wird aber das Perpendikel, welches kleiner als 90° ist, sH , und das aufzulösende rechtwinklichte Kugeldreieck sHP seyn. In diesem kennt man das Perpendikel

$$\begin{aligned} PH &= 180^\circ - PR \\ &= 180^\circ - \varepsilon \end{aligned}$$

und die Hypotenuse $Ps = 90^\circ + \delta$;
der rechte Winkel befindet sich in H .

Also läßt sich hieraus der dem gegebenen Perpendikel PH anliegende Winkel sPH auf eben die Art, wie vorhin, finden. Es ist aber sPH mit dem Bogen Ad , der dem gesuchten halben Tagebogen τ gleich ist, einerley. Was demnach in

Formel 5 der Tafel 1 oder 4:
$$\begin{array}{c|c|c} a & c & B \\ \text{ist hier: } P s & P H & s P H \\ = 90^\circ + \delta & = 180^\circ - \varepsilon & = \tau \end{array}$$

Folglich

3) $\text{Cosin } \tau = \text{Tang } \varepsilon \cdot \text{Tang } \delta$
wenn die Abweichung der Sonne Südlich ist.

Oder

$$\text{Tang } \frac{1}{2} \tau = r \left(\frac{\text{Sin } (90^\circ + \delta - (180^\circ - \varepsilon))}{\text{Sin } (90^\circ + \delta + (180^\circ - \varepsilon))} \right)$$

welches folgende andere Formel giebt:

4) $\text{Tang } \frac{1}{2} \tau = r \left(\frac{\text{Cosin } (\varepsilon + \delta)}{\text{Cosin } (\varepsilon - \delta)} \right)$
wenn die Abweichung Südlich ist.

V. Allein man kann in diesem Falle auch das vorige Dreieck SPR beybehalten, welches aber nunmehr sich in sPR verwandelt, so dass man Ps d. i. $90^\circ + \delta$ statt PS oder $90^\circ - \delta$ gebraucht. Solcherge-
 stalt findet man in dem rechtwinklichten Kugeldreieck sPR aus Ps oder $90^\circ + \delta$ und PR oder ε , den Winkel $sPR = dT$ der von 180° abgezogen, den gesuchten Bogen $Ad = \tau$ übrig lässt. Endlich wird τ in Zeit eben so wie vorher verwandelt. Also

statt:
$$\begin{array}{c|c|c} a & c & B \\ \text{gesetzt: } P s & P R & s P R \\ = 90^\circ + \delta & = \varepsilon & = 180^\circ - \tau \end{array}$$

erhält man

$$\text{Cosin } (180^\circ - \tau) = \text{Tang } \varepsilon \cdot \text{Cotang } (90^\circ + \delta)$$

das ist

$$\text{Cosin } \tau = \text{Tang } \varepsilon \cdot \text{Tang } \delta, \text{ wie vorher bey 3).}$$

Oder

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (180^\circ - \tau) = r \left(\frac{\text{Sin } (90^\circ + \delta - \varepsilon)}{\text{Sin } (90^\circ + \delta + \varepsilon)} \right)$$

das ist

$$\text{Tang } \frac{1}{2} \tau = r \left(\frac{\text{Cosin } (\varepsilon + \delta)}{\text{Cosin } (\varepsilon - \delta)} \right)$$

ebenfalls wie vorher bey 4).

VI. Man kann gegenwärtige Aufgabe auch durch Betrachtung des Dreiecks ZPS für Nördliche Abweichungen, oder ZPs für Südliche, *in welchem eine Seite ZS, oder Zs, = 90° ist*, nach der Art wie im vorhergehenden, Seite 66, dergleichen Kugeldreiecke zu behandeln gelehrt worden ist, auflösen, und zwar folgendergestalt: Hiezu sehe man Tafel II. Figur XV.

$ZS = 90^\circ$	$Zs = 90^\circ$
$ZP = 90^\circ - \varepsilon$	$ZP = 90^\circ - \varepsilon$
$PS = 90^\circ - \delta$	$Ps = 90^\circ + \delta$
und man sucht $ZPS = \tau$	$ZPs = \tau$

<i>Was hier</i> ZS	ZP	PS	ZPS
(Zs)		(Ps)	(ZPs)
<i>ist Taf. I. Fig. V. Seite 66</i> A	B	C	a

Folglich:

<i>Gegeben Fig. V.</i>	<i>Gesucht</i>	<i>Verwandelt in Fig. IV.</i>
$A = 90^\circ$	<i>Fig. V.</i>	$A = 90^\circ$
$B = 90^\circ - \varepsilon$	$a = \tau$	$B = 90^\circ + \varepsilon$
$C = 90^\circ \pm \delta \begin{cases} \text{Nö. Abw.} \\ \text{Sü. —} \end{cases}$		$C = 90^\circ \pm \delta \begin{cases} \text{Nö. Abw.} \\ \text{Sü. Abw.} \end{cases}$
		$a = 180^\circ - \tau$
		Dies ist nunmehr der

Fall aus den beyden Winkeln eines rechtwinklichten Kugeldreiecks die Hypotenuse zu berechnen, wozu in Tafel I oder 4, die Formel 15 auf Seite 51 und 57 dient. Die eine giebt

$$\text{Cosin } (180^\circ - \tau) = \text{Cot } (90^\circ + \epsilon) \cdot \text{Cot } (90^\circ \pm \delta)$$

d. i. für Nördliche Abweichungen

$$\text{Cosin } (180^\circ - \tau) = \text{Tang } \epsilon \cdot \text{Tang } \delta$$

wie in III bey 1). Seite 112

und für Südliche

$$\text{Cosin } (180^\circ - \tau) = - \text{Tang } \epsilon \cdot \text{Tang } \delta$$

welches soviel ist als

$$\text{Cosin } \tau = \text{Tang } \epsilon \cdot \text{Tang } \delta$$

wie in IV bey 3). Seite 113

Die andere Formel aus Tafel 4 giebt

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (180^\circ - \tau) = r \left(- \frac{\text{Cos } (90^\circ + \epsilon + (90^\circ \pm \delta))}{\text{Cos } (90^\circ + \epsilon - (90^\circ \pm \delta))} \right)$$

d. i. für Nördliche Abweichung

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (180^\circ - \tau) = r \left(\frac{- \text{Cosin } (180^\circ + \epsilon + \delta)}{\text{Cosin } (\epsilon - \delta)} \right)$$

oder

$$\text{Cotang } \frac{1}{2} \tau = r \left(\frac{\text{Cosin } (\epsilon + \delta)}{\text{Cosin } (\epsilon - \delta)} \right)$$

also auch

$$\text{Tang } \frac{1}{2} \tau = r \left(\frac{\text{Cosin } (\epsilon - \delta)}{\text{Cosin } (\epsilon + \delta)} \right)$$

wie in III bey 2). Seite 112

und für Südliche Abweichung

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (180^\circ - \tau) = r \left(\frac{- \text{Cosin } (180^\circ + \epsilon - \delta)}{\text{Cosin } (\epsilon + \delta)} \right)$$

oder

$$\text{Cotang } \frac{1}{2} \tau = r \left(\frac{\text{Cosin } (\epsilon - \delta)}{\text{Cosin } (\epsilon + \delta)} \right)$$

woraus sich ergibt

$$\text{Tang } \frac{1}{2} \tau = r \left(\frac{\text{Cosin } (\epsilon + \delta)}{\text{Cosin } (\epsilon - \delta)} \right)$$

wie in IV bey 4). Seite 113

Man trifft also auf diesem Wege, durch das Supplement-Dreieck von ZPS oder ZPs, auf die nemlichen Formeln wie vorher.

VII. Es läßt sich diese zweyte Aufgabe auf eine noch andere Art auflösen, nemlich durch Hülfe des Kugeldreiecks CDS (Cds) welches in D (d) rechtwinklicht ist, weil der Abweichungskreis PD (Pd) auf den Aequator ACT senkrecht steht. In diesem Dreieck kennt man außer dem rechten Winkel in D (d) folgende zwey Stücke:

- 1) das Perpendikel DS (ds) welches die Abweichung der Sonne ist, $= \delta$;
- 2) den gegenüberstehenden Winkel SCD (sCd) $= ACH =$ der Aequatorhöhe AH $= 90^\circ - \epsilon$.

Hieraus läßt sich also das andere Perpendikel CD (Cd) $= u$, welches ein Bogen vom Aequator und $< 90^\circ$ ist, nach Tafel 1 oder 4, Formel 8, finden, wenn man

$$\begin{array}{c|c|c} \text{anstatt } c & C & b \\ \text{setzt} & \delta & 90^\circ - \epsilon \end{array} \quad \begin{array}{c} u \\ u \end{array}$$

dies giebt nach Tafel 1, Formel 8, die Gleichung

$$5) \sin u = \tan \epsilon \cdot \tan \delta$$

oder nach Tafel 4, Formel 8:

$$6) \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right) = r \left(\frac{\cos(\epsilon - \delta)}{\cos(\epsilon + \delta)} \right)$$

Dieser Bogen u (wenn in beyden Formeln die Abweichung δ , sie mag Nördlich oder Südlich seyn, als *positiv* angefetzt wird) giebt aber an, um wie viel die halbe Tageslänge $\left\{ \begin{array}{c} \text{größer} \\ \text{kleiner} \end{array} \right\}$ als 6 Stunden ist, bey

$\left\{ \begin{array}{c} \text{Nördlicher} \\ \text{Südlicher} \end{array} \right\}$ Abweichung der Sonne. Es gehören

nemlich 6 Stunden dem Bogen oder Quadranten AC zu.
Folglich wird der halbe Tagebogen

$$\tau = 90^\circ + u \quad \text{oder} \quad \tau = 90^\circ - u$$

d. i. $\tau = 6 \text{ St.} + u \text{ in Zeit}$ oder $\tau = 6 \text{ St.} - u \text{ in Zeit}$

Der Bogen CD (Cd) = u heisst die Ascensional-Differenz. Man findet also hier den halben Tagebogen eines *Gestirns* *vermitteltst der Ascensional-Differenz* desselben. Denn statt der Sonne kann auch ein Stern gegeben seyn, und die Aufgabe läßt sich für selbigen eben so auflösen.

VIII. Nachfolgende Tafel stellt die gegenwärtig gefundenen Auflösungen im Zusammenhange dar.

Tafel zur Zweyten Aufgabe.

Gegeben.

ϵ, δ d. i. Nördliche Polhöhe nebst Abweichung der Sonne oder eines Sterns.

Gesucht.

τ oder der halbe Tagebogen, ohne Rücksicht auf die Horizontal-Refraktion.

Formeln.

Fall 1) Wenn die Abweichung δ Nördlich ist:

$$\text{Cosin } (180^\circ - \tau) = \text{Tang } \epsilon. \text{Tang } \delta$$

Fall 2) Wenn die Abweichung Südlich ist:

$$\text{Cosin } \tau = \text{Tang } \epsilon. \text{Tang } \delta$$

In beyden Fällen wird in der Rechnung δ als *positiv* angesetzt. Aber in folgender Formel

$$3) \text{Tang } \frac{1}{2} \tau = r \frac{\text{Cosin } (\epsilon - \delta)}{\text{Cosin } (\epsilon + \delta)}$$

ist δ für *Nördliche* Abweichungen *positiv*, und für *Südliche negativ* anzunehmen.

$$4) \text{Sin } u = \text{Tang } \epsilon. \text{Tang } \delta$$

oder

$$5) \text{Tang } (45^\circ + \frac{1}{2} u) = r \frac{\text{Cosin } (\epsilon - \delta)}{\text{Cosin } (\epsilon + \delta)}$$

In diesen beyden Formeln 4) und 5) wird δ allezeit *positiv* angenommen, es mag die Abweichung Nördlich oder Südlich seyn. Hat man aber aus einer von ihnen u gefunden, so ist

$$\tau = 90^\circ \pm u$$

wo $+$ bey Nördlicher Abweichung, und $-$ bey Südlicher gebraucht wird.

Beyspiele zu diesen Formeln.

$\varepsilon = 49^\circ$ Nördlich;

$\delta = 20^\circ$ Nördlich und Südlich.

Rechnung nach Fall 1 und 2.

$$\begin{array}{r} \text{Log Tang } \varepsilon = 10,0608369 \\ + \text{log Tang } \delta = 9,5610659 \\ \hline \text{log Cosin } 65^\circ 14' 51'' = 9,6219028 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 180^\circ - \tau = 65^\circ 14' 51'' & \tau = 65^\circ 14' 51'' \\ \text{subtrahirt von } 180^\circ = 179.59.60. & = 4 \text{ St. } 20.59,4. \\ & \text{bey Südlicher} \\ & \text{Abweichung.} \\ \tau = 114.45.9 & \\ = 7 \text{ St. } 39.0,6. & \\ \text{bey Nördlicher} & \\ \text{Abweichung.} & \end{array}$$

Rechnung nach Formel 3.

Für Nördliche Abweichung.

$$\begin{array}{r|l} \varepsilon = 49^\circ & \varepsilon = 49^\circ \\ - \delta = -20. & + \delta = +20. \\ \hline \varepsilon - \delta = 29. & \varepsilon + \delta = 69. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 + \text{log Cosin } (\varepsilon - \delta) = 29,9418193 \\ - \text{log Cosin } (\varepsilon + \delta) = 9,5543292 \\ \hline \end{array}$$

$$2 \cdot \text{log Tang } \frac{1}{2} \tau = 20,3874901$$

$$\text{log Tang } \frac{1}{2} \tau = 10,1937450$$

$$\frac{1}{2} \tau = 57^\circ 22' 34,5''$$

$$\tau = 114.45.9.$$

wie vorhin nach Fall 1.

Für Südliche Abweichung.

$$\begin{array}{r|l} \varepsilon = 49^\circ & \varepsilon = 49^\circ \\ -\delta = +20. & +\delta = -20. \\ \hline \varepsilon - \delta = 69. & \varepsilon + \delta = 29. \end{array}$$

$$20 + \log \text{Cosin} (\varepsilon - \delta) = 29,5543292$$

$$- \log \text{Cosin} (\varepsilon + \delta) = 9,9418193$$

$$2. \log \text{Tang} \frac{1}{2} \tau = 19,6125099$$

$$\log \text{Tang} \frac{1}{2} \tau = 9,8062550$$

$$\frac{1}{2} \tau = 32^\circ 37' 25,5''$$

$$\tau = 65. 14. 51.$$

eben so wie nach Fall 2.

Rechnung nach Formel 4 und 5.

Aus der Rechnung nach

Fall 1 hat man:

$$\log \text{Sin} u = 9,6219028$$

$$u = 24^\circ 45' 9''$$

Aus der Rechnung nach

Formel 3 ist:

$$\log \text{Tang} (45^\circ + \frac{1}{2} u) = 10,1937450$$

$$45^\circ + \frac{1}{2} u = 57^\circ 22' 34,5''$$

$$- 45^\circ = 45. 0. 0$$

$$\frac{1}{2} u = 12. 22. 34,5$$

$$u = 24. 45. 9.$$

$$90^\circ = 90^\circ 0' 0''$$

$$\pm u = 24. 45. 9.$$

$$90^\circ + u = \tau = 114. 45. 9. \left\{ \begin{array}{l} \text{Für die Nördliche} \\ \text{Abweichung von } 20^\circ. \end{array} \right.$$

$$90^\circ - u = \tau = 65. 14. 51. \left\{ \begin{array}{l} \text{Für die Südliche} \\ \text{Abweichung von } 20^\circ. \end{array} \right.$$

60 mögliche Fälle

nebst ihren Auflösungen

im

schiefwinklichten Kugeldreieck

dessen Seiten die Complementary der Nördlichen Polhöhe ε , der Abweichung δ , und der Höhe η eines Sterns, und in dessen Winkeln Supplement des Azimuths ω , der Stundenwinkel τ , und parallaktischer Winkel σ dieses Sterns sind.

*Man sehe Tafel II.
Fig. XVI.*

Gegeben.	Ge- sucht	Fall.	Auflösung.
1. η, δ, τ	ε	9	$a = 90^\circ - \eta$ $b = 90^\circ - \delta$ $A = \tau$ $c = 90^\circ - \varepsilon$
2. η, δ, α	ε	9	$a = 90^\circ - \delta$ $b = 90^\circ - \eta$ $A = 180^\circ - \alpha$ $c = 90^\circ - \varepsilon$
3. η, δ, σ	ε	4	$a = 90^\circ - \eta$ od. $90^\circ - \delta$ die grössere Seite $c = 90^\circ - \delta$ od. $90^\circ - \eta$ die kleinere Seite $B = \sigma$ $b = 90^\circ - \varepsilon$
4. η, τ, σ	ε	10	$A = \tau$ $B = \sigma$ $a = 90^\circ - \eta$ $b = 90^\circ - \varepsilon$
5. δ, α, σ	ε	10	$A = 180^\circ - \alpha$ $B = \sigma$ $a = 90^\circ - \delta$ $b = 90^\circ - \varepsilon$
6. η, α, τ	ε	11	$A = \tau$ $B = 180^\circ - \alpha$ $a = 90^\circ - \eta$ $c = 90^\circ - \varepsilon$
7. δ, α, τ	ε	11	$A = 180^\circ - \alpha$ $B = \tau$ $a = 90^\circ - \delta$ $c = 90^\circ - \varepsilon$

Gegeben.	Ge- sucht	Fall.	Auflösung.
8. δ, τ, σ	ε	5	$X = \sigma$ $C = \tau$ $b = 90^\circ - \delta$ $x = 90^\circ - \varepsilon$
9. η, α, σ	ε	5	$X = \sigma$ $C = 180^\circ - \alpha$ $b = 90^\circ - \eta$ $x = 90^\circ - \varepsilon$
10. α, τ, σ	ε	2	$A = \sigma$ $B = 180^\circ - \alpha$ $C = \tau$ $x = 90^\circ - \varepsilon$
11. $\varepsilon, \delta, \tau$	η	4	$a = 90^\circ - \varepsilon$ od. $90^\circ - \delta$ die grössere Seite $c = 90^\circ - \delta$ od. $90^\circ - \varepsilon$ die kleinere Seite $B = \tau$ $b = 90^\circ - \eta$
12. $\varepsilon, \delta, \alpha$	η	9	$a = 90^\circ - \delta$ $b = 90^\circ - \varepsilon$ $A = 180^\circ - \alpha$ $c = 90^\circ - \eta$
13. $\varepsilon, \delta, \sigma$	η	9	$a = 90^\circ - \varepsilon$ $b = 90^\circ - \delta$ $A = \sigma$ $c = 90^\circ - \eta$
14. δ, α, τ	η	10	$A = 180^\circ - \alpha$ $B = \tau$ $a = 90^\circ - \delta$ $b = 90^\circ - \eta$

Gegeben.	Ge- sucht	Fall.	Auflösung.
15. $\varepsilon, \tau, \sigma$	η	10	$A = \sigma$ $B = \tau$ $a = 90^\circ - \varepsilon$ $b = 90^\circ - \eta$
16. $\varepsilon, \alpha, \tau$	η	5	$X = \tau$ $C = 180^\circ - \alpha$ $b = 90^\circ - \varepsilon$ $x = 90^\circ - \eta$
17. δ, τ, σ	η	5	$X = \tau$ $C = \sigma$ $b = 90^\circ - \delta$ $x = 90^\circ - \eta$
18. δ, α, σ	η	11	$A = 180^\circ - \alpha$ $B = \sigma$ $a = 90^\circ - \delta$ $c = 90^\circ - \eta$
19. $\varepsilon, \alpha, \sigma$	η	11	$A = \sigma$ $B = 180^\circ - \alpha$ $a = 90^\circ - \varepsilon$ $c = 90^\circ - \eta$
20. α, τ, σ	η	2	$A = \tau$ $B = 180^\circ - \alpha$ $C = \sigma$ $x = 90^\circ - \eta$
21. ε, η, τ	δ	9	$a = 90^\circ - \eta$ $b = 90^\circ - \varepsilon$ $A = \tau$ $c = 90^\circ - \delta$

Gegeben.	Ge- sucht	Fall.	Auflösung.
22. ϵ, η, α	δ	4	$a = 90^\circ - \epsilon$ od. $90^\circ - \eta$ die grössere Seite $c = 90^\circ - \eta$ od. $90^\circ - \epsilon$ die kleinere Seite $B = 180^\circ - \alpha$ $b = 90^\circ - \delta$
23. ϵ, η, σ	δ	9	$a = 90^\circ - \epsilon$ $b = 90^\circ - \eta$ $A = \sigma$ $c = 90^\circ - \delta$
24. η, α, τ	δ	10	$A = \tau$ $B = 180^\circ - \alpha$ $a = 90^\circ - \eta$ $b = 90^\circ - \delta$
25. ϵ, α, σ	δ	10	$A = \sigma$ $B = 180^\circ - \alpha$ $a = 90^\circ - \epsilon$ $b = 90^\circ - \delta$
26. ϵ, α, τ	δ	5	$X = 180^\circ - \alpha$ $C = \tau$ $b = 90^\circ - \epsilon$ $x = 90^\circ - \delta$
27. η, τ, σ	δ	11	$A = \tau$ $B = \sigma$ $a = 90^\circ - \eta$ $c = 90^\circ - \delta$
28. ϵ, τ, σ	δ	11	$A = \sigma$ $B = \tau$ $a = 90^\circ - \epsilon$ $c = 90^\circ - \delta$

Gegeben.	Ge- sucht	Fall.	Auflösung.
29. η, α, σ	δ	5	$X = 180^\circ - \alpha$ $C = \sigma$ $b = 90^\circ - \eta$ $x = 90^\circ - \delta$
30. α, τ, σ	δ	2	$A = 180^\circ - \alpha$ $B = \tau$ $C = \sigma$ $x = 90^\circ - \delta$
31. $\varepsilon, \eta, \delta$	α	1	$a = 90^\circ - \delta$ $b = 90^\circ - \varepsilon$ $c = 90^\circ - \eta$ $x = 180^\circ - \alpha$
32. η, δ, τ	α	7	$a = 90^\circ - \eta$ $b = 90^\circ - \delta$ $A = \tau$ $B = 180^\circ - \alpha$
33. $\varepsilon, \delta, \sigma$	α	7	$a = 90^\circ - \varepsilon$ $b = 90^\circ - \delta$ $A = \sigma$ $B = 180^\circ - \alpha$
34. ε, η, τ	α	8	$a = 90^\circ - \eta$ $b = 90^\circ - \varepsilon$ $A = \tau$ $C = 180^\circ - \alpha$
35. $\varepsilon, \delta, \tau$	α	3	$x = 90^\circ - \delta$ $a = 90^\circ - \varepsilon$ $C = \tau$ $X = 180^\circ - \alpha$

Gegeben.	Ge- sucht	Fall.	Auflösung.
36. η, δ, σ	α	3	$x = 90^\circ - \delta$ $a = 90^\circ - \eta$ $C = \sigma$ $X = 180^\circ - \alpha$
37. $\varepsilon, \eta, \sigma$	α	8	$a = 90^\circ - \varepsilon$ $b = 90^\circ - \eta$ $A = \sigma$ $C = 180^\circ - \alpha$
38. η, τ, σ	α	12	$A = \tau$ $B = \sigma$ $a = 90^\circ - \eta$ $C = 180^\circ - \alpha$
39. $\varepsilon, \tau, \sigma$	α	12	$A = \sigma$ $B = \tau$ $a = 90^\circ - \varepsilon$ $C = 180^\circ - \alpha$
40. δ, τ, σ	α	6	$A = \tau$ $B = \sigma$ $c = 90^\circ - \delta$ $C = 180^\circ - \alpha$
41. $\varepsilon, \eta, \delta$	τ	1	$a = 90^\circ - \eta$ $b = 90^\circ - \varepsilon$ $c = 90^\circ - \delta$ $x = \tau$
42. η, δ, α	τ	7	$a = 90^\circ - \delta$ $b = 90^\circ - \eta$ $A = 180^\circ - \alpha$ $B = \tau$

Gegeben.	Ge- sucht	Fall.	Auflösung.
43. $\varepsilon, \eta, \sigma$	τ	7	$a = 90^\circ - \varepsilon$ $b = 90^\circ - \eta$ $A = \sigma$ $B = \tau$
44. $\varepsilon, \eta, \alpha$	τ	3	$x = 90^\circ - \eta$ $a = 90^\circ - \varepsilon$ $C = 180^\circ - \alpha$ $X = \tau$
45. $\varepsilon, \delta, \alpha$	τ	8	$a = 90^\circ - \delta$ $b = 90^\circ - \varepsilon$ $A = 180^\circ - \alpha$ $C = \tau$
46. η, δ, σ	τ	3	$x = 90^\circ - \eta$ $a = 90^\circ - \delta$ $C = \sigma$ $X = \tau$
47. $\varepsilon, \delta, \sigma$	τ	8	$a = 90^\circ - \varepsilon$ $b = 90^\circ - \delta$ $A = \sigma$ $C = \tau$
48. η, α, σ	τ	6	$A = 180^\circ - \alpha$ $B = \sigma$ $c = 90^\circ - \eta$ $C = \tau$
49. $\varepsilon, \alpha, \sigma$	τ	12	$A = \sigma$ $B = 180^\circ - \alpha$ $a = 90^\circ - \varepsilon$ $C = \tau$

Gegeben.	Ge- sucht	Fall.	Auflösung.
50. δ, α, σ	τ	12	$A = 180^\circ - \alpha$ $B = \sigma$ $a = 90^\circ - \delta$ $C = \tau$
51. $\varepsilon, \eta, \delta$	σ	1	$a = 90^\circ - \varepsilon$ $b = 90^\circ - \eta$ $c = 90^\circ - \delta$ $x = \sigma$
52. ε, η, τ	σ	7	$a = 90^\circ - \eta$ $b = 90^\circ - \varepsilon$ $A = \tau$ $B = \sigma$
53. $\varepsilon, \delta, \alpha$	σ	7	$a = 90^\circ - \delta$ $b = 90^\circ - \varepsilon$ $A = 180^\circ - \alpha$ $B = \sigma$
54. η, δ, τ	σ	8	$a = 90^\circ - \eta$ $b = 90^\circ - \delta$ $A = \tau$ $C = \sigma$
55. $\varepsilon, \delta, \tau$	σ	3	$x = 90^\circ - \varepsilon$ $a = 90^\circ - \delta$ $C = \tau$ $X = \sigma$
56. η, δ, α	σ	8	$a = 90^\circ - \delta$ $b = 90^\circ - \eta$ $A = 180^\circ - \alpha$ $C = \sigma$

Gegeben.	Ge- sucht	Fall.	Auflösung.
57. $\varepsilon, \eta, \alpha$	σ	3	$x = 90^\circ - \varepsilon$ $a = 90^\circ - \eta$ $C = 180^\circ - \alpha$ $X = \sigma$
58. η, α, τ	σ	12	$A = \tau$ $B = 180^\circ - \alpha$ $a = 90^\circ - \eta$ $C = \sigma$
59. $\varepsilon, \alpha, \tau$	σ	6	$A = 180^\circ - \alpha$ $B = \tau$ $c = 90^\circ - \varepsilon$ $C = \sigma$
60. δ, α, τ	σ	12	$A = 180^\circ - \alpha$ $B = \tau$ $a = 90^\circ - \delta$ $C = \sigma$

Gegeben.

• Nördliche Polhöhe

δ Abweichung der ☉ oder eines * { Nördliche +
Südliche —

v Höhe der ☉ oder eines *.

Erste Auflösung.

$$90^\circ - \eta = a;$$

$$90^\circ - \delta = b;$$

$$90^\circ - \varepsilon = c;$$

$$\frac{a + b + c}{2} = S;$$

$$\sin \frac{1}{2} \tau = r \left(\frac{r^2 \cdot \sin (S - b) \cdot \sin (S - c)}{\sin b \cdot \sin c} \right);$$

wo r der *Sinus totus* ist. $\tau =$ in Gra $\tau =$ in Zeit

Steht die ☉ oder der * auf der Ostseite, so wird die Zeit hirt; der Rest giebt z . Steht aber die ☉ oder der * die Zeit $\tau = z$; hingegen bey dem * wird die Zeit τ

Gesucht. τ Stundenwinkel

z wahre Zeit der Beobachtung.

Zweyte Auflösung.

$$90^\circ - \eta = a;$$

$$90^\circ - \delta = b;$$

$$90^\circ - \epsilon = c;$$

man nenne Seiten $= a, b;$ so ist für den Sinus totus $= r:$

$$\text{Tang } u = \frac{\text{Tang } \frac{1}{2}(a+b) \cdot \text{Tang } \frac{1}{2}(a \oslash b) \cdot \text{Cot } \frac{1}{2}c}{r^2}$$

$$\text{Großes Segment} = \frac{1}{2}c + u;$$

$$\text{Kleines Segment} = \frac{1}{2}c - u;$$

$$\text{Cosin } \tau = \frac{\text{Tang des anliegenden Segments} \cdot \text{Cotang } b}{r}$$

In dieser letzten Gleichung nimmt man zu der größten Seite das groſſe Segment; das kleine zu der kleinsten Seite. Und wenn das kleine Segment negativ und $< 90^\circ$ sich findet, so setzt man die Tangente dieses Segments negativ.

den des Aequators
der ersten Bewegung.

τ von der Zeit der Culmination der ☉ oder des ✳ subtra-
auf der Westseite des Meridians, so ist bey der ☉ schon
zur Culminationszeit des ✳ addirt, und die Summe giebt z.

Gegeben:

ε Nördliche Polhöhe

δ Abweichung der ☉ oder eines * { Nördliche +
Südliche —

η Höhe der ☉ oder eines *.

Dritte Auflösung.

$$\frac{\epsilon + (90^\circ - \delta) + \eta}{2} = Q$$

$$\sin \frac{1}{2} \tau = r \left(\frac{r^2 \cdot \cos Q \cdot \sin (Q - \eta)}{\cos \epsilon \cdot \cos \delta} \right)$$

wo r der Sinus totus ist.

τ = in Gra

τ = in Zeit

Steht die ☉ oder der * auf der Ostseite, so wird die Zeit hirt; der Rest giebt z. Steht aber die ☉ oder der * die Zeit τ = z; hingegen bey dem * wird die Zeit τ

Gesucht. τ Stundenwinkel z wahre Zeit der Beobachtung.*Vierte Auflösung.*

$$\frac{90^\circ - \delta - \epsilon}{2} = u$$

$$\sin \frac{1}{2} \tau = r \left(\frac{r^2 \cdot \sin (u - \frac{1}{2} \eta + \epsilon) \cdot \sin (u - \frac{1}{2} \eta + \delta)}{\cos \epsilon \cdot \cos \delta} \right)$$

Oder

$$\cos \frac{1}{2} \tau = r \left(\frac{r^2 \cdot \cos (u - \frac{1}{2} \eta) \cdot \sin (u + \frac{1}{2} \eta)}{\cos \epsilon \cdot \cos \delta} \right)$$

wo r der *Sinus totus* ist.

den des Aequators
der ersten Bewegung.

τ von der Zeit der Culmination der ☉ oder des ✳ subtra-
auf der Westseite des Meridians, so ist bey der ☉ schon
zur Culminationszeit des ✳ addirt, und die Summe giebt z .

Gegeben.

• Nördliche Polhöhe

δ Abweichung eines Gestirns { Nördliche +
Südliche —

τ Stundenwinkel.

Erste Auflösung.

$$\text{Tang } u = \frac{\text{Cotang } \varepsilon \cdot \text{Cosin } \tau}{r}$$

$$\text{Sin } \eta = \frac{\text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Sin } (u + \delta)}{\text{Cosin } u}$$

Für den *Sinus totus* = r.

Zweyte Auflösung.

$$\text{Tang } u = r \left(\frac{\text{Sin } \frac{1}{2} \tau \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} \tau \cdot \text{Cosin } \varepsilon \cdot \text{Cosin } \delta}{\text{Sin } \frac{1}{2} (\varepsilon \cup \delta) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} (\varepsilon \cap \delta)} \right)$$

$$\text{Sin } \frac{1}{2} (90^\circ - \eta) = \frac{r \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} (\varepsilon \cup \delta)}{\text{Cosin } u}$$

Für den *Sinus totus* = r.

Gesucht.

η Höhe des Gestirns.

Dritte Auflösung.

$$\text{Cosin } u = r \left(\frac{\text{Cosin } \frac{1}{2} \tau \cdot \text{Cosin } \frac{1}{2} \tau \cdot \text{Cosin } \epsilon \cdot \text{Cosin } \delta}{\text{Cosin } \frac{1}{2} (\epsilon + \delta) \cdot \text{Cosin } \frac{1}{2} (\epsilon + \delta)} \right)$$

$$\text{Sin } \frac{1}{2} (90^\circ - \eta) = \frac{\text{Cosin } \frac{1}{2} (\epsilon + \delta) \cdot \text{Sin } u}{r}$$

Für den *Sinus totus* = r .

Gegeben.

δ Abweichung $\begin{cases} \text{Nördliche} + \\ \text{Südliche} - \end{cases}$

η Höhe

τ Stundenwinkel eines Gestirns.

Erste Auflösung.

$$\sin B = \frac{\cos \delta \cdot \sin \tau}{\cos \eta}$$

$$\tan \frac{1}{2} (90^\circ - \cdot) = \frac{\cos \frac{1}{2} (\tau + B) \cdot \cotang \frac{1}{2} (\eta + \delta)}{\cos \frac{1}{2} (\tau - B)}$$

Steht das Gestirn zwischen dem ersten Scheitelkreise und demjenigen Quadranten des Meridians der durch den Scheitelpunkt und Südpunkt geht, so ist B stumpf; steht solches aber zwischen dem ersten Vertikalkreise und demjenigen Quadranten des Meridians der durch den Scheitel- und Nördpunkt geht, so ist B spitzig.

Gesucht.

* Nördliche Polhöhe.

Zweyte Auflösung.

$$\text{Tang } u = \frac{\text{Cosin } \tau \cdot \text{Cotang } \delta}{r}$$

$$\text{Cosin } z = \frac{\text{Cosin } u \cdot \text{Sin } \tau}{\text{Sin } \delta}$$

$$u \pm z = 90^\circ - \epsilon$$

Man nimmt die Summe $u + z$, wenn τ und B gleichartig sind, im entgegengesetzten Falle den Unterschied $u - z$.

Steht das Gestirn zwischen dem ersten Vertikalkreise und dem Quadranten des Meridians der durch den Scheitel und Südpunkt geht, so ist B stumpf; steht es aber zwischen dem ersten Vertikalkreise und dem andern Theile des Meridians der durch den Scheitel und Nordpunkt geht, so ist B spitzig.

Gegeben.

ϵ Nördliche Polhöhe

δ Abweichung der $\odot$ oder eines $*$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Nördliche} + \\ \text{Südliche} - \end{array} \right.$

η Höhe der $\odot$ oder eines $*$.

Gesucht.

α Azimuth der $\odot$ oder eines $*$.

Auflösung.

$$\frac{\epsilon + (90^\circ - \eta) + \delta}{2} = u$$

$$\text{Cosin } \frac{1}{2} \alpha = r \left(\frac{r^2 \cdot \text{Cosin } u \cdot \text{Sin } (u - \delta)}{\text{Cosin } \epsilon \cdot \text{Cosin } \eta} \right)$$

wo r der *Sinus totus* ist.

α ist östlich oder westlich, je nachdem die $\odot$ oder der $*$ vor oder nach dem Durchgange durch den Mittagkreis beobachtet wird.

Gegeben. η Höhe eines Gestirns δ Abweichung $\begin{cases} \text{Nördliche} & + \\ \text{Südliche} & - \end{cases}$ α Azimuth $\begin{cases} \text{Oestlich} \\ \text{Westlich} \end{cases}$ *Gesucht.* τ Stundenwinkel z Zeit der Beobachtung.*Auflösung.*

$$\sin \tau = \frac{\cos \eta \cdot \sin \alpha}{\cos \delta}$$

τ in Graden des Aequators giebt in Zeit der ersten Bewegung verwandelt die wahre Zeit z durch $\begin{cases} \text{Subtraktion von} \\ \text{Addition zu} \end{cases}$ der Culminationszeit des Gestirns je nachdem α $\begin{cases} \text{östlich} \\ \text{westlich} \end{cases}$ ist.

Gegeben.

- η Höhe eines Gestirns
 δ Abweichung $\begin{cases} \text{Nördliche} + \\ \text{Südliche} - \end{cases}$
 α Azimuth. Oestlich oder Westlich.

Gesucht.

- ϵ Nördliche Polhöhe.

Erste Auflösung.

$$\sin \tau = \frac{\cos \eta \cdot \sin \alpha}{\cos \delta}$$

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (90^\circ - \epsilon) = \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \tau) \cdot \text{Cotang } \frac{1}{2} (\eta + \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \tau)}$$

Zweyte Auflösung.

$$\text{Tang } u = \frac{\cos \alpha \cdot \text{Cotang } \eta}{r}$$

$$\cos z = \frac{\cos u \cdot \sin \delta}{\sin \eta}$$

$$u \pm z = 90^\circ - \epsilon$$

Für den *Sinus totus* $= r$.

Man nimmt die Summe $u + z$, wenn der Nebenwinkel des Azimuths $180^\circ - \alpha$ und der Stundenwinkel τ gleichartig sind; gegentheils den Unterschied $u - z$.

Einige
 Erläuterungen und Beyspiele
 zu den 60 Fällen
 im
 schiefwinklichten Kugeldreieck
 in dessen Winkeln
 Nordpol P, Scheitelpunkt Z
 und Stern S find.

E r s t e A u f g a b e.

Aus der Nördlichen Polhöhe $= \varepsilon$, der Abweichung $= \delta$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Nördl. } + \\ \text{Südl. } - \end{array} \right\}$
 und der Höhe eines Gestirns $= \eta$; die Zeit $= z$ zu
 finden.

Erste Auflösungsart.

Wenn in Taf. II. Fig. XVII. Z das Zenith, P den Nord-
 pol, und S das Gestirn bezeichnet; so ist ZP das Com-
 plement der Polhöhe; SP das Complement der Ab-
 weichung des Gestirns; SZ das Complement der Höhe
 desselben; oder

$$\begin{array}{l|l}
 ZP = 90^\circ - \varepsilon = c & \\
 SP = 90^\circ - \delta = b & \\
 SZ = 90^\circ - \eta = a &
 \end{array} \quad \left| \quad \frac{a + b + c}{2} = S
 \right.$$

Sind diese drey Stücke gegeben, so findet sich der Stundenwinkel $ZPS = \tau = x$ vermittelst des ersten Falles schiefwinklchter Kugeldreiecke, nemlich durch die Gleichung

$$\sin \frac{1}{2} x = r \left(\frac{r^2 \cdot \sin (S - b) \cdot \sin (S - c)}{\sin b \cdot \sin c} \right)$$

diesen Stundenwinkel verwandelt man dann in Zeit, 15° auf 1 St. gerechnet (Berl. Samml. astron. Tafeln, Band 1. Tafel XXXI. Seite 293) und wenn man nun noch die Zeit des Durchgangs des Gestirns durch den Mittagskreis weis, so wird auch die Zeit der Beobachtung gegeben seyn.

Beyspiel 1. Für die Sonne.

$$\varepsilon = 51^\circ 32' 0''$$

$$\delta = +19. 39. 10. \text{ oder Nördlich}$$

$$\eta = 38. 18. 46.$$

Rechnung.

$90^\circ = 90^\circ 0' 0''$	$90^\circ = 89^\circ 59' 60''$	$90^\circ = 89^\circ 59' 60''$
$\varepsilon = 51. 32. 0.$	$\delta = +19. 39. 10.$	$\eta = 38. 18. 46.$
$90^\circ - \varepsilon = 38. 28. 0.$	$90^\circ - \delta = 70. 20. 50.$	$90^\circ - \eta = 51. 41. 14.$
$= c$	$= b$	$= a$

$a = 51^\circ 41' 14''$	$S = 80^\circ 15' 2''$	$S = 80^\circ 15' 2''$
$b = 70. 20. 50.$	$b = 70. 20. 50.$	$c = 38. 28. 0.$
$c = 38. 28. 0.$	$S - b = 9. 54. 12.$	$S - c = 41. 47. 2.$
$a + b + c = 160. 30. 4.$		
$a + b + c$		
$\frac{160. 30. 4}{2} = 80. 15. 2.$		
$= S$		

$$20 + \log \sin (S - b) = 29,235\,4941$$

$$+ \log \sin (S - c) = 9,823\,6847$$

$$\text{Summe} = 39,059\,1788$$

$$- \log \sin b = 9,973\,9347$$

$$\text{Rest} = 29,085\,2441$$

$$- \log \sin c = 9,793\,8317$$

$$\text{Rest} = 19,291\,4124$$

$$\text{Hälfte} = 9,645\,7062$$

$$= \log \sin \frac{1}{2} x$$

$$\frac{1}{2} x = 26^\circ 15' 0''$$

$$x = 52. 30. 0. = \tau$$

$$52^\circ = 3 \text{ St. } 28. 0.$$

$$30' = 0 \quad 2. 0.$$

$$52^\circ 30' 0'' \text{ in Zeit verw.} = 3. 30. 0.$$

$$\text{die Sonne culminirt um } 12. 0. 0.$$

$$\text{Folglich } z = 8 \text{ Uhr } 30. 0. \text{ Vormittage.}$$

$$\text{oder} = 3. 30. 0. \text{ Nachmittage, je nachdem die Sonne auf der Ost- oder Westseite}$$

des Meridians, zur Zeit der Beobachtung stand.

Beyspiel 2, ebenfalls für die Sonne.

$$\varepsilon = 43^\circ 18' 0''$$

$$\delta = -19. 39. 10. \text{ d. i. Südlich}$$

$$\eta = 20. 10. 0.$$

Rechnung.

$90^\circ = 90^\circ 0' 0''$	$90^\circ = 90^\circ 0' 0''$	$90^\circ = 89^\circ 60' 0''$
$\varepsilon = 43. 18. 0.$	$\delta = -19. 39. 10.$	$\eta = 20. 10. 0.$
$90^\circ - \varepsilon = 46. 42. 0.$	$90^\circ - \delta = 109. 39. 10.$	$90^\circ - \eta = 69. 50. 0.$
$= c$	$= b$	$= a$

$a = 69^\circ 50' 0''$	$S = 113^\circ 5' 35''$	$S = 113^\circ 5' 35''$
$b = 109. 39. 10.$	$b = 109. 39. 10.$	$c = 46. 42. 0.$
$c = 46. 42. 0.$	$S - b = 3. 26. 25.$	$S - c = 66. 23. 35.$
$a + b + c = 226. 11. 10.$		
$\frac{a + b + c}{2} = 113. 5. 35.$		
$= S$		

$$20 + \log \sin (S - b) = 28,778\,2098$$

$$+ \log \sin (S - c) = 9,962\,0444$$

$$\text{Summe} = 38,740\,2542$$

$$- \log \sin b = 9,973\,9347$$

$$\text{Rest} = 28,766\,3195$$

$$- \log \sin c = 9,861\,9958$$

$$2. \log \sin \frac{1}{2} x = 18,904\,3237$$

$$\log \sin \frac{1}{2} x = 9,452\,1618$$

$$\frac{1}{2} x = 16^\circ 27' 14''$$

$$x = 32. 54. 28. = \tau$$

$$32^\circ = 2 \text{ St. } 8. 0.$$

$$54' = 0. 3. 36.$$

$$28'' = 0. 0. 1,9.$$

$$32^\circ 54' 28'' = 2. 11. 37,9. \text{ vor}$$

oder *nach* 12 Uhr Mittags. Also die Zeit z entweder

$$= 9 \text{ Uhr } 48' 22,1'' \text{ Vormitt.}$$

$$\text{oder} = 2. 11. 37,9. \text{ Nachm.}$$

Anmerkung.

Wollte man die Formel des $\sin \frac{1}{2} x$ für einen Ort brauchen, wo der Südpol erhoben wäre, und deutete durch den bejahten Werth von ε , *Südliche* Polhöhe an, so würde der bejahte Werth von δ , *Südlicher* Abweichung, der verneinte Werth von δ aber, *Nördlicher* Abweichung zugehören.

Zweyte Auflösungsart.

Hier bleiben alle Vorbereitungen wie bey der ersten Auflösungsart, nur wird statt der vorhergehenden Formel, Fall 1 der Auflösung schiefwinklchter Kugeldreiecke num. 1. die num. 4. daselbst Seite 75 vorkommende gewählt. Die Rechnung wird jetzt so geführt:

Beyspiel 1. Für den Aldebaran.

$$\varepsilon = 51^{\circ} 15' 0'' \text{ Nördlich.}$$

$$\delta = +16. 1. 6. \text{ od. Nö.d. 13 Nov. 1764.}$$

$$\eta = 38. 58. 0. \text{ östlich oder vor der Culminat. des } * = 13 \text{ U. 3. 53, 7.} \quad \text{mination.}$$

Man verlangt die wahre Zeit der Beobachtung zu wissen.

Rechnung.

$90^{\circ} = 89^{\circ} 60' 0''$	$90^{\circ} = 89^{\circ} 59' 60''$	$90^{\circ} = 89^{\circ} 60' 0''$
$\varepsilon = 51. 15. 0.$	$\delta = +16. 1. 6.$	$\eta = 38. 58. 0.$
$90^{\circ} - \varepsilon = 38. 45. 0.$	$90^{\circ} - \delta = 73. 58. 54.$	$90^{\circ} - \eta = 51. 2. 0.$
$= c$	$= b > a$	$= a$

$a = 51^{\circ} 2' 0''$	$\log \text{Tang } \frac{1}{2}(a+b) = 10,2836622$
$b = 73. 58. 54.$	$+ \log \text{Tang } \frac{1}{2}(b-a) = 9,3074592$
$a+b = 125. 0. 54.$	$+ \log \text{Cotang } \frac{1}{2} c = 10,4538706$
$\frac{a+b}{2} = 62. 30. 27.$	$\log \text{Tang } u = 10,0449920$
$b-a = 22. 56. 54.$	$u = 47^{\circ} 57' 45''$
$\frac{b-a}{2} = 11. 28. 27.$	$\frac{1}{2} c = 19. 22. 30.$
$c = 38. 45. 0.$	$\frac{1}{2} c + u = 67. 20. 15$ wird
$\frac{1}{2} c = 19. 22. 30.$	hier genommen, weil $b > a$. Folglich
	hat man
	$\text{Cosin } r = \text{Tang } (\frac{1}{2} c + u). \text{ Cotang } b.$

$$\log \text{Tang } \left(\frac{1}{2}c + u\right) = 10,379\,3016$$

$$+ \log \text{Cotang } b = 9,458\,0206$$

$$\log \text{Cosin } \tau = 9,837\,3222$$

$$\tau = 46^{\circ} 33' 41''$$

$$= 3 \text{ St. } 6. 14,7. \text{ Subtrahirt von der}$$

$$\text{Culmination des } * = 13. 3. 53,7.$$

$$z = 9. 57. 39,0. \text{ die gesuchte wahre} \\ \text{Zeit der Beobachtung.}$$

Beyspiel 2. Für die Sonne.

$$\alpha = 43^{\circ} 18' 0'' \text{ Nö. } | c = 46^{\circ} 42' 0'' | \frac{1}{2}c = 23^{\circ} 21' 0''$$

$$\delta = -19. 39. 10. \text{ d.i. Sü. } | b = 109. 39. 10. | \frac{a+b}{2} = 89. 44. 35.$$

$$\eta = 20. 10. 0. | a = 69. 50. 0. | \frac{b-a}{2} = 19. 54. 35.$$

$$\log \text{Tang } \frac{1}{2}(a+b) = 12,348\,2805$$

$$\log \text{Tang } \frac{1}{2}(b-a) = 9,558\,9327$$

$$\log \text{Cotang } \frac{1}{2}c = 10,364\,8150$$

$$\log \text{Tang } u = 12,272\,0282$$

$$u = 89^{\circ} 41' 37''$$

$$\frac{1}{2}c = 23. 21. 0.$$

$$\frac{1}{2}c + u = 113. 2. 37.$$

weil b die größte Seite ist.

$$\text{Cosin } \tau = \text{Tang } \left(\frac{1}{2}c + u\right). \text{ Cotang } b$$

$$= \text{Tang } 113^{\circ} 2' 37''. \text{ Cotang } 109^{\circ} 39' 10''$$

$$= \text{Tang } 66^{\circ} 57' 23''. \text{ Cotang } 70^{\circ} 20' 50''$$

$$\log \text{Tang } 66^{\circ} 57' 23'' = 10,371\,2297$$

$$\log \text{Cotang } 70. 20. 50. = 9,552\,8169$$

$$\log \text{Cosin } \tau = 9,924\,0466$$

$$\tau = 32^{\circ} 54' 26,5''$$

$$= 2 \text{ St. } 11. 37,8. \text{ der ge-}$$

suchte Stundenwinkel, wie vorher Beyspiel 2
der ersten Auflösungsart, Seite 146.

Anmerkung.

Wenn man, wie Seite 128. num. 41. angegeben ist, $b = 90^\circ - \epsilon$ und $c = 90^\circ - \delta$ setzt, so wird im vorhergehenden Beyspiele 2, $b = 46^\circ 42' 0''$ und $c = 109^\circ 39' 10''$ also $b < a$ oder b zur kleinsten Seite. Für diesen Fall steht nun die Rechnung also:

$$\begin{array}{l|l|l} \delta = -19^\circ 39' 10'' & c = 109^\circ 39' 10'' & \frac{1}{2}c = 54^\circ 49' 35'' \\ \epsilon = 43. 18. 0. & b = 46. 42. 0. & \frac{a+b}{2} = 58. 16. 0. \\ \eta = 20. 10. 0. & a = 69. 50. 0. & \frac{a-b}{2} = 11. 34. 0. \end{array}$$

$$\log \text{Tang } \frac{1}{2}(a+b) = 10,2087189$$

$$\log \text{Tang } \frac{1}{2}(a-b) = 9,3110421$$

$$\log \text{Cotang } \frac{1}{2}c = 9,8480245$$

$$\log \text{Tang } u = 9,3677855$$

$$u = 13^\circ 7' 42''$$

$$\frac{1}{2}c = 54. 49. 35.$$

$$\frac{1}{2}c - u = 41. 41. 53.$$

weil b die kleinste Seite ist.

$$\text{Cosin } \tau = \text{Tang } (\frac{1}{2}c - u) \cdot \text{Cotang } b$$

$$\log \text{Tang } (\frac{1}{2}c - u) = 9,9498322$$

$$\log \text{Cotang } b = 9,9742133$$

$$\log \text{Cosin } \tau = 9,9240455$$

$$\tau = 32^\circ 54' 27''$$

$$= 2 \text{ St. } 11. 37,8. \text{ wie auf der vorhergehenden Seite.}$$

Dritte Auflösungsart.

In der Formel für $\sin \frac{1}{2} \tau$ der ersten Auflösungsart setze man statt S , b und c die Werthe derselben, nemlich

$$S = \frac{(90^\circ - \eta) + (90^\circ - \delta) + (90^\circ - \varepsilon)}{2}$$

$$b = 90^\circ - \delta$$

$$c = 90^\circ - \varepsilon$$

Nun ist aber $S - b$ d. i.

$$\frac{(90^\circ - \eta) + (90^\circ - \delta) + (90^\circ - \varepsilon)}{2} - (90^\circ - \delta) = \frac{90^\circ - \varepsilon + \delta - \eta}{2}$$

und $S - c$ d. i.

$$\frac{(90^\circ - \eta) + (90^\circ - \delta) + (90^\circ - \varepsilon)}{2} - (90^\circ - \varepsilon) = \frac{\varepsilon + (90^\circ - \delta) + \eta}{2} - \eta$$

Dahero

$$\sin^2 \frac{1}{2} \tau = \frac{\sin \frac{1}{2} (90^\circ - \varepsilon + \delta - \eta) \cdot \sin (\frac{1}{2} (\varepsilon + (90^\circ - \delta) + \eta) - \eta)}{\cos \delta \cdot \cos \varepsilon}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2} (\varepsilon + (90^\circ - \delta) + \eta) \cdot \sin (\frac{1}{2} (\varepsilon + (90^\circ - \delta) + \eta) - \eta)}{\cos \delta \cdot \cos \varepsilon}$$

und

$$\frac{\varepsilon + (90^\circ - \delta) + \eta}{2} = Q \text{ gesetzt:}$$

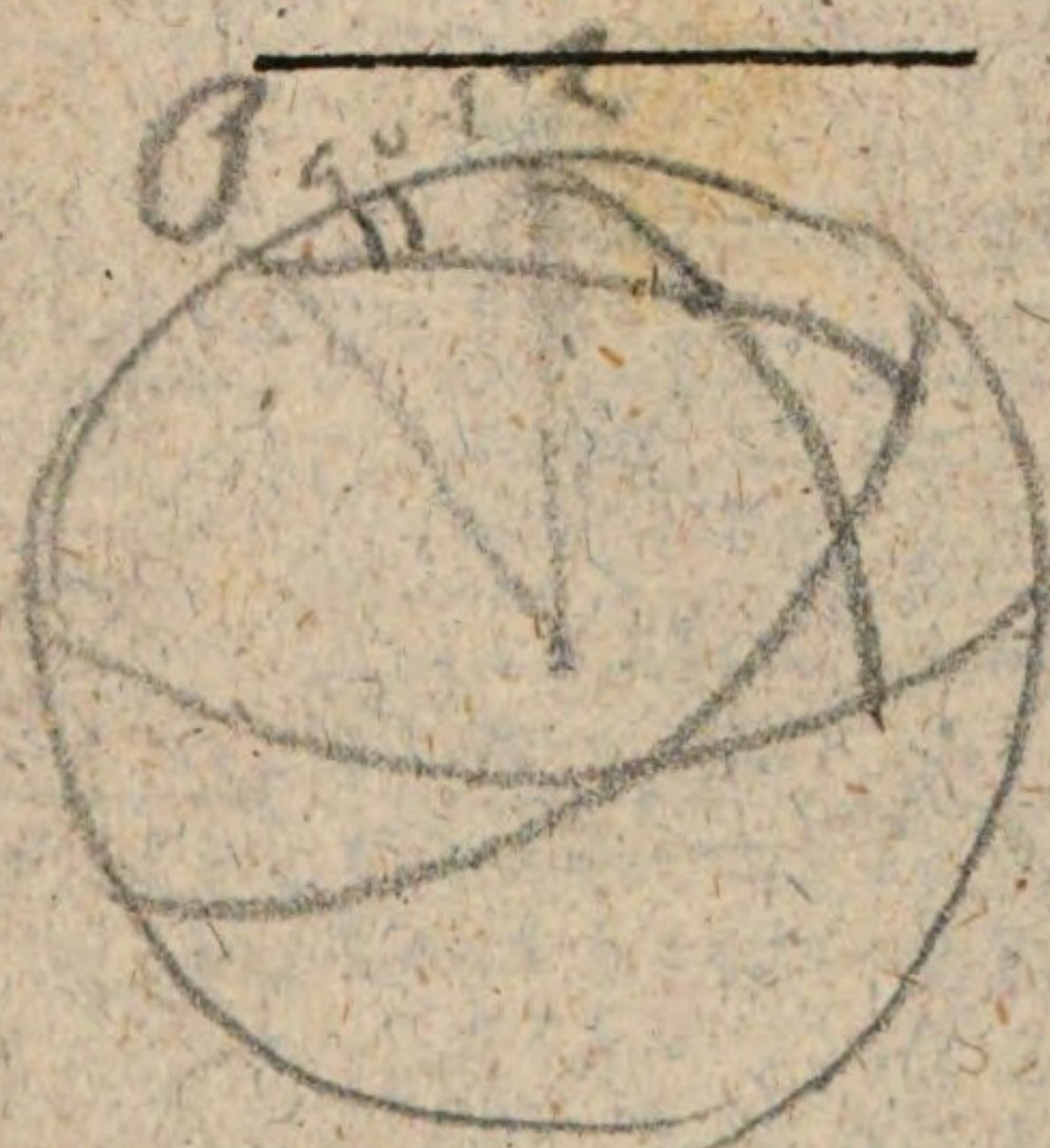
$$\sin \frac{1}{2} \tau = r \left(\frac{\cos Q \cdot \sin (Q - \eta)}{\cos \varepsilon \cdot \cos \delta} \right)$$

Beyspiel 1.

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 52^{\circ} \quad 0' \quad 0'' \text{ Nördlich.} \\ \delta &= 22. \quad 5. \quad 0. \text{ Nördlich.} \\ \eta &= 33. \quad 0. \quad 0.\end{aligned}$$

Rechnung.

$90^{\circ} = 90^{\circ} \quad 0' \quad 0''$	$20 + \log \text{Cosin } Q = 29,369\,4987$
$\delta = +22. \quad 5. \quad 0.$	$+ \log \text{Sin}(Q - \eta) = 9,860\,8617$
$90^{\circ} - \delta = 67.55. \quad 0.$	Summe = 39,230\,3604
$\varepsilon = 52. \quad 0. \quad 0.$	$- \log \text{Cosin } \varepsilon = 9,789\,3420$
$\eta = 33. \quad 0. \quad 0.$	
	Rest = 29,441\,0184
Summe = 152.55. 0.	$- \log \text{Cosin } \delta = 9,966\,9101$
$Q = 76.27.30.$	
$\eta = 33. \quad 0. \quad 0.$	$2. \log \text{Sin } \frac{1}{2} \tau = 19,474\,1083$
	$\log \text{Sin } \frac{1}{2} \tau = 9,737\,0541$
$Q - \eta = 43.27.30.$	$\frac{1}{2} \tau = 33^{\circ} \quad 4' \quad 52''$
	$\tau = 66. \quad 9. \quad 44.$
	$66^{\circ} = 4\text{St.}24. \quad 0.$
	$9' = 0. \quad 0. \quad 36.$
	$44'' = 0. \quad 0. \quad 2,9.$
	$\tau \text{ in Zeit} = 4. \quad 24. \quad 38,9.$



Beispiel 2.

$$\varepsilon = 43^{\circ} 18' 0'' \text{ Nördlich.}$$

$$\delta = 19. 39. 10. \text{ Südlich.}$$

$$\eta = 20. 10. 0.$$

Rechnung.

$90^{\circ} = 90^{\circ} 0' 0''$	$20 + \log \text{Cosin } Q = 28,778 2098$
$\delta = -19. 39. 10.$	$+ \log \text{Sin } (Q - \eta) = 9,962 0444$
$90^{\circ} - \delta = 109. 39. 10.$	Summe = 38,740 2542
$\varepsilon = 43. 18. 0.$	$- \log \text{Cosin } \varepsilon = 9,861 9958$
$\eta = 20. 10. 0.$	
	Rest = 28,878 2584
Summe = 173. 7. 10.	$- \log \text{Cosin } \delta = 9,973 9347$
$Q = 86. 33. 35.$	
$\eta = 20. 10. 0.$	$2. \log \text{Sin } \frac{1}{2} \tau = 18,904 3237$
	$\log \text{Sin } \frac{1}{2} \tau = 9,452 1618$
$Q - \eta = 66. 23. 35.$	$\frac{1}{2} \tau = 16^{\circ} 27' 14''$
	$\tau = 32. 54. 28.$
	$= 2\text{St. } 11. 37,9.$
	wie Seite 146.

Vierte Auflösungsart.

Diese ist schon Seite 106 vorgekommen; es ist also nur noch übrig zu zeigen, wie die Rechnung nach ihr vorgenommen wird.

Beispiel.

$$\varepsilon = 50^{\circ} \ 8' \ 0'' \text{ Nö.}$$

$$\delta = 10. \ 18. \ 0. \text{ Nö.}$$

$$\eta = 3. \ 18. \ 34. \text{ Vormittage, an der Sonne.}$$

$90^{\circ} \ 0' \ 0''$	$20 + \log \sin(u - \frac{1}{2}\eta + \varepsilon) = 29,9508868$
$\delta = + 10. \ 18. \ 0.$	$+ \log \sin(u - \frac{1}{2}\eta + \delta) = 9,5994531$
$90^{\circ} - \delta = 79.42. \ 0.$	Summe = 39,5503399
$\varepsilon = 50. \ 8. \ 0.$	— $\log \cos \varepsilon = 9,8068602$
$90^{\circ} - \delta - \varepsilon = 29.34. \ 0.$	Rest = 29,7434797
$u = 14.47. \ 0.$	— $\log \cos \delta = 9,9929444$
$\frac{1}{2}\eta = 1.39.17.$	2. $\log \sin \frac{1}{2}\tau = 19,7505353$
$u - \frac{1}{2}\eta = 13. \ 7.43.$	$\log \sin \frac{1}{2}\tau = 9,8752676$
$u - \frac{1}{2}\eta + \varepsilon = 63.15.43.$	$\frac{1}{2}\tau = 48^{\circ} \ 37' \ 16,5''$
$u - \frac{1}{2}\eta + \delta = 23.25.43.$	$\tau = 97.14.33.$
Oder	$97^{\circ} = 6 \text{ St. } 28. \ 0.$
$u + \frac{1}{2}\eta = 16.26.17.$	$14' = 0. \ 0.56.$
	$33'' = 0. \ 0. \ 2,2.$
	$\tau \text{ in Zeit} = 6. \ 28. \ 58,2.$
	subtr. von 12 St. = 11.59.60,0.
	$z = 5 \text{ U. } 31.1,8. \text{ Fröh}$
	die verlangte wahre Zeit.

Oder

$$20 + \log \cos(u - \frac{1}{2}\eta) = 29,9884977$$

$$+ \log \sin(u + \frac{1}{2}\eta) = 9,4517535$$

$$\text{Summe} = 39,4402512$$

$$\text{— } \log \cos \varepsilon = 9,8068602$$

$$\text{Rest} = 29,6333910$$

$$\text{— } \log \cos \delta = 9,9929444$$

$$2. \log \cos \frac{1}{2}\tau = 19,6404466$$

$$\text{— } \log \cos \frac{1}{2}\tau = 9,8202233$$

$$\frac{1}{2}\tau = 48^{\circ} \ 37' \ 16,6''$$

$$\tau = 97.14.33,2.$$

$$= 6 \text{ St. } 28. \ 58,2. \text{ wie vorhin.}$$

Z w e y t e A u f g a b e.

Ans der Nördlichen Polhöhe $= \varepsilon$, der Abweichung $= \delta \left\{ \begin{array}{l} \text{Nördl. } + \\ \text{Südl. } - \end{array} \right\}$
und dem Stundenwinkel $= \tau$; die Höhe des Gestirns $= \eta$
zu finden.

Erste Auflösung.

Es ist hier im Kugeldreieck, welches mit dem zur vorigen Aufgabe einerley ist, gegeben:

$$\begin{array}{l|l} ZP = 90^\circ - \varepsilon = a & \\ SP = 90^\circ - \delta = c & \text{Man sehe Tafel II.} \\ ZPS = \tau = B & \text{Fig. XVIII.} \end{array}$$

und wird gesucht:

$$ZS = 90^\circ - \eta = b$$

Man hat also ein sphärisches Dreieck aufzulösen, in welchem zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind, und die dritte Seite gesucht wird. Dies ist der vierte Fall bey der Auflösung schiefwinklichter Kugeldreiecke, und so wird seyn, für den Halbmesser $= 1$:

$$\text{Tang } u = \text{Tang } a \cdot \text{Cosin } B$$

$$= \text{Cotang } \varepsilon \cdot \text{Cosin } \tau$$

$$\text{Cosin } b = \frac{\text{Cosin } a \cdot \text{Cosin } (c - u)}{\text{Cosin } u}$$

d. i.

$$\text{Sin } \eta = \frac{\text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Sin } (\delta + u)}{\text{Cosin } u}$$

Zweyte Auflösung.

$$\begin{aligned}\text{Tang } u &= r \left(\frac{\sin \frac{1}{2} B. \sin \frac{1}{2} B. \sin a. \sin c}{\sin \frac{1}{2} (a \frown c). \sin \frac{1}{2} (a \frown c)} \right) \\ &= r \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \tau. \sin \frac{1}{2} \tau. \cos \epsilon. \cos \delta}{\sin^2 \frac{1}{2} [(90^\circ - \epsilon) \frown (90^\circ - \delta)]} \right) \\ &= r \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \tau. \sin \frac{1}{2} \tau. \cos \epsilon. \cos \delta}{\sin \frac{1}{2} (\epsilon \frown \delta). \sin \frac{1}{2} (\epsilon \frown \delta)} \right);\end{aligned}$$

$$\sin \frac{1}{2} b \text{ oder } \sin \frac{1}{2} (90^\circ - \eta) = \frac{\sin \frac{1}{2} (\epsilon \frown \delta)}{\cos u}.$$

Wenn man aber erwägt, daß für die Sonne in unsern nördlichen Gegenden, allezeit $\epsilon > \delta$ ist, so wird für selbige, so wie auch für alle Sterne wo $\epsilon > \delta$:

$$\begin{aligned}\text{Tang } u &= r \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \tau. \sin \frac{1}{2} \tau. \cos \epsilon. \cos \delta}{\sin \frac{1}{2} (\epsilon - \delta). \sin \frac{1}{2} (\epsilon - \delta)} \right) \\ \sin \frac{1}{2} (90^\circ - \eta) &= \frac{\sin \frac{1}{2} (\epsilon - \delta)}{\cos u}\end{aligned}$$

Dritte Auflösung.

$$\begin{aligned}\cos u &= r \left(\frac{\cos \frac{1}{2} B. \cos \frac{1}{2} B. \sin a. \sin c}{\sin \frac{1}{2} (a + c). \sin \frac{1}{2} (a + c)} \right) \\ &= r \left(\frac{\cos \frac{1}{2} \tau. \cos \frac{1}{2} \tau. \cos \epsilon. \cos \delta}{\sin^2 \frac{1}{2} (180^\circ - (\epsilon + \delta))} \right) \\ &= r \left(\frac{\cos \frac{1}{2} \tau. \cos \frac{1}{2} \tau. \cos \epsilon. \cos \delta}{\cos \frac{1}{2} (\epsilon + \delta). \cos \frac{1}{2} (\epsilon + \delta)} \right)\end{aligned}$$

Endlich

$$\sin \frac{1}{2} b = \sin \frac{1}{2} (a + c). \sin u$$

gibt

$$\sin \frac{1}{2} (90^\circ - \eta) = \cos \frac{1}{2} (\epsilon + \delta). \sin u$$

Beyspiel.

$$\varepsilon = 52^{\circ} 31' 30'' \text{ Nö.}$$

$$\delta = +22. 12. 15. \text{ d. i. Nö.}$$

$$\tau = 3 \text{ St. } 50. \text{ als Zeit der ersten Bewegung}$$

und in Graden des Aequators

$$= 57^{\circ} 30. 0.$$

Man verlangt hieraus die Höhe der Sonne $= \eta$.

Rechnung nach der 1sten Auflösung.

$$\log \text{ Cotang } \varepsilon = 9,8845881$$

$$\log \text{ Cosin } \tau = 9,7302165$$

$$\log \text{ Tang } u = 9,6148046$$

$$u = 22^{\circ} 23' 14''$$

$$+ \delta = +22. 12. 15.$$

$$u + \delta = 44. 35. 29.$$

$$\log \text{ Sin } \varepsilon = 9,8996120$$

$$\log \text{ Sin } (u + \delta) = 9,8463656$$

$$\text{Summe} = 19,7459776$$

$$- \log \text{ Cos } u = 9,9659684$$

$$\log \text{ Sin } \eta = 9,7800092$$

$$\eta = 37^{\circ} 3' 16'' \text{ die gesuchte wahre Höhe der Sonne.}$$

Rechnung nach der 2ten Auflösung.

$$\begin{aligned}
 \tau &= 57^{\circ} 30' 0'' \\
 \frac{1}{2} \tau &= 28. 45. 0. \\
 \varepsilon &= 52. 31. 30. \\
 \delta &= + 22. 12. 15.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon - \delta &= 30. 19. 15. \\
 \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta) &= 15. 9. 37,5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log \sin \frac{1}{2} \tau &= 9,682 1349 \\
 \log \sin \frac{1}{2} \tau &= 9,682 1349 \\
 \log \cos \varepsilon &= 9,784 2001 \\
 \log \cos \delta &= 9,966 5374
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Summe} &= 39,115 0073 \\
 - \log \sin \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta) &= 9,417 5089
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Rest} &= 29,697 4984 \\
 - \log \sin \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta) &= 9,417 5089
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \log \tan u &= 20,279 9895 \\
 \log \tan u &= 10,139 9947 \\
 u &= 54^{\circ} 4' 43'' \\
 10 + \log \sin \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta) &= 19,417 5089 \\
 - \log \cos u &= 9,768 3974
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log \sin \frac{1}{2} (90^{\circ} - \eta) &= 9,649 1115 \\
 \frac{1}{2} (90^{\circ} - \eta) &= 26^{\circ} 28' 22'' \\
 90^{\circ} - \eta &= 52. 56. 44. \\
 \eta &= 37. 3. 16.
 \end{aligned}$$

wahre $\odot$ höhe.

Rechnung nach der 3ten Auflösung.

$$\begin{aligned}
 \tau &= 57^{\circ} 30' 0'' \\
 \frac{1}{2} \tau &= 28. 45. 0. \\
 \varepsilon &= 52. 31. 30. \\
 \delta &= + 22. 12. 15.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon + \delta &= 74. 43. 45. \\
 \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta) &= 37. 21. 52,5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log \text{Cosin } \frac{1}{2} \tau &= 9,942 8643 \\
 \log \text{Cosin } \frac{1}{2} \tau &= 9,942 8643 \\
 \log \text{Cosin } \varepsilon &= 9,784 2001 \\
 \log \text{Cosin } \delta &= 9,966 5374
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Summe} &= 39,636 4661 \\
 - \log \text{Cosin } \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta) &= 9,900 2523
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Rest} &= 29,736 2138 \\
 - \log \text{Cosin } \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta) &= 9,900 2523
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \log \text{Cosin } u &= 19,835 9615 \\
 \log \text{Cosin } u &= 9,917 9807 \\
 u &= 34^{\circ} 6' 57'' \\
 \log \text{Sin } u &= 9,748 8605 \\
 \log \text{Cosin } \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta) &= 9,900 2523
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log \text{Sin } \frac{1}{2} (90^{\circ} - \eta) &= 9,649 1128 \\
 \frac{1}{2} (90^{\circ} - \eta) &= 26^{\circ} 28' 22'' \\
 90^{\circ} - \eta &= 52. 56. 44. \\
 \eta &= 37. 3. 16.
 \end{aligned}$$

wahre $\odot$ höhe.*Anmerkung.*

Nach der ersten Auflösungsart kann eine Hülfs-
 tafel für eine constante Polhöhe ε und variable Zeit τ
 berechnet werden. Dieser Tafel Eingang oder Argu-
 ment wird τ in Zeit, und sie muß den Winkel u und

daneben den dazu gehörigen $\log \frac{\sin \varepsilon}{\cos u}$ enthalten.

Mit der gegebenen Zeit τ excerptirt man aus ihr u und $\log \frac{\sin \varepsilon}{\cos u}$ die beyde nebeneinander stehen. Da man

nun u nebst δ hat, so addirt man zu $\log \frac{\sin \varepsilon}{\cos u}$ den

$\log \sin (u + \delta)$. Die Summe giebt den verlangten $\log \sin \eta$. Eine dergleichen Tafel für die Berliner Polhöhe befindet sich im ersten Supplementbände zu Boudens astronomischen Jahrbüchern, Seite 78 — 86; nach derselben wird das vorhergehende Beyspiel so berechnet:

$\tau = 3 \text{ St. } 50'$ giebt für Berlin:

$u = 22^\circ 23' 14''$	$\log \frac{\sin \varepsilon}{\cos u} = 9,9336436$
$\delta = +22. 12. 15.$	
$u + \delta = 44. 35. 29.$ $\log \sin (u + \delta) = 9,8463656$	
$\log \sin \eta = 9,7800092$ $\eta = 37^\circ 3' 16''$ ge- nau so wie vorher.	

Dritte Aufgabe.

Aus der Abweichung $= \delta \left\{ \begin{array}{l} \text{Nördl. } + \\ \text{Südl. } - \end{array} \right\}$, der Höhe $= \eta$, und dem Stundenwinkel eines Gestirns $= \tau$; die Nördliche Polhöhe $= \varepsilon$ zu berechnen.

Auflösung.

Dies ist *Fall 9* schiefwinkliger Kugeldreiecke: und es ist hier

$$\begin{array}{l} \text{gegeben} \left\{ \begin{array}{l} 90^\circ - \eta = ZS = a \\ 90^\circ - \delta = PS = b \\ \tau = ZPS = A \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{Man sehe} \\ \text{Tafel II.} \\ \text{Fig. XIX,} \end{array} \right. \\ \text{man sucht } 90^\circ - \varepsilon = ZP = c \end{array}$$

Es wird also seyn:

Die erste Auflösungsart.

$$\sin B = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin a} = \frac{\cos \delta \cdot \sin \tau}{\cos \eta};$$

$$\begin{aligned} \text{Tang } \frac{1}{2} c \text{ oder } \text{Tang } \frac{1}{2} (90^\circ - \varepsilon) &= \frac{\cos \frac{1}{2} (A+B) \cdot \text{Tang } \frac{1}{2} (a+b)}{\cos \frac{1}{2} (A-B)} \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2} (\tau+B) \cdot \cot \frac{1}{2} (\eta+\delta)}{\cos \frac{1}{2} (\tau-B)} \end{aligned}$$

Da bey den Sonnenhöhen, B gewöhnlich stumpf ist, so waltet bey diesen keine Zweydeutigkeit ob. Ueberhaupt kann man sich merken, wenn der Stern zwischen dem sogenannten *ersten* Vertikalkreise (der durch den Ost- und Westpunkt geht) und dem Südpunkte steht, so ist B stumpf; steht er aber zwischen dem ersten Vertikalkreise und dem Nordpunkt, so ist B spitzig. Dies gilt auch bey der folgenden zweyten Auflösungsart.

Die zweyte Auflösungsart.

$$\text{Tang } u = \text{Cosin } A. \text{ Tang } b = \text{Cosin } \tau. \text{ Cotang } \delta;$$

$$\text{Cosin } z = \frac{\text{Cosin } u. \text{Cosin } a}{\text{Cosin } b} = \frac{\text{Cosin } u. \text{Sin } \eta}{\text{Sin } \delta};$$

$$u \pm z = c = 90^\circ - \epsilon.$$

Man nimmt die Summe $u + z$, wenn τ und B gleichartig sind, hingegen den Unterschied $u - z$, wenn τ und B ungleichartig sind. Da aber bey den Sonnenhöhenmessungen die Winkel τ und B gewöhnlich ungleichartig sind, oder τ spitzig und B stumpf ist; so hat man bey der Sonne

$$u - z = c = 90^\circ - \epsilon$$

und die Zweydeutigkeit fällt ebenfalls weg.

Beyspiel 1.

$$\delta = 12^\circ \quad 8' \quad 8'' \text{ Nördlich.}$$

$$\eta = 41. \quad 8. \quad 6.$$

$$\tau = 36. \quad 3. \quad 15.$$

Berechnung nach der ersten Auflösungsart.

$$\log \text{Cosin } \delta = 9,9901847$$

$$\log \text{Sin } \tau = 9,7697833$$

$$\text{Summe} = 19,7599680$$

$$\log \text{Cosin } \eta = 9,8768883$$

$$\log \text{Sin } B = 9,8830797$$

gehört zu $49^\circ 48' 58''$

subtr. von $179. 59. 60.$

$$\text{bleibt } B = 130. 11. 2. \text{ stumpf.}$$

$$\tau = 36^{\circ} 3' 15''$$

$$B = 130. 11. 2.$$

$$\tau + B = 166. 14. 17.$$

$$\frac{1}{2}(\tau + B) = 83. 7. 8,5.$$

$$B - \tau = 94. 7. 47.$$

$$\frac{1}{2}(B - \tau) = 47. 3. 53,5.$$

$$\eta = 41. 8. 6.$$

$$\delta = + 12. 8. 8.$$

$$\eta + \delta = 53. 16. 14.$$

$$\frac{1}{2}(\eta + \delta) = 26. 38. 7.$$

$$\log \text{Cosin } \frac{1}{2}(\tau + B) = 9,078 4827$$

$$\log \text{Cotang } \frac{1}{2}(\eta + \delta) = 10,299 7005$$

$$\text{Summe} = 19,378 1832$$

$$\log \text{Cosin } \frac{1}{2}(\tau - B) = 9,833 2555$$

$$\log \text{Tang } \frac{1}{2}(90^{\circ} - \epsilon) = 9,544 9277$$

$$\frac{1}{2}(90^{\circ} - \epsilon) = 19^{\circ} 19' 31,5''$$

$$90^{\circ} - \epsilon = 38. 39. 3.$$

$$\epsilon = 51. 20. 57. \text{ die verlangte Polhöhe.}$$

Berechnung nach der zweyten Auflösungsart.

$$\log \text{Cosin } \tau = 9,907 6590$$

$$\log \text{Cotang } \delta = 10,667 4998$$

$$\log \text{Tang } u = 10,575 1588$$

$$u = 75^{\circ} 6' 20''$$

$$\log \text{Cosin } u = 9,409 9992$$

$$\log \text{Sin } \eta = 9,818 1173$$

$$\text{Summe} = 19,228 1165$$

$$\log \text{Sin } \delta = 9,322 6849$$

$$\log \text{Cosin } z = 9,905 4316$$

$$z = 36^{\circ} 27' 18''$$

$$u = 75. 6. 20.$$

$$90^{\circ} - \epsilon = u - z = 38. 39. 2.$$

*wird hier
genommen*

$$\epsilon = 51. 20. 58.$$

Beyspiel 2.

$$\delta = 4^{\circ} 4' 19'' \text{ Südlich.}$$

$$\eta = 28. 36. 28.$$

$$\tau = 33. 17. 30.$$

Rechnung nach der ersten Auflösungsart.

$$\log \text{Cosin } \delta = 9,998\,9024$$

$$\log \text{Sin } \tau = 9,739\,4942$$

$$\text{Summe} = 19,738\,3966$$

$$\log \text{Cosin } \eta = 9,943\,4539$$

$$\log \text{Sin } B = 9,794\,9427$$

$$\text{gehört zu } 38^{\circ} 35' 0''$$

$$\text{subtr. von } 180. 0. 0.$$

$$B = 141. 25. 0.$$

$$\tau = 33. 17. 30.$$

$$\tau + B = 174. 42. 30.$$

$$\frac{1}{2}(\tau + B) = 87. 21. 15.$$

$$B - \tau = 108. 7. 30.$$

$$\frac{1}{2}(B - \tau) = 54. 3. 45.$$

$$\eta = 28. 36. 28.$$

$$\delta = 4. 4. 19.$$

$$\eta + \delta = 24. 32. 9.$$

$$\frac{1}{2}(\eta + \delta) = 12. 16. 4,5.$$

$$\log \text{Cosin } \frac{1}{2}(\tau + B) = 8,664\,2854$$

$$\log \text{Cotang } \frac{1}{2}(\eta + \delta) = 10,662\,6431$$

$$\text{Summe} = 19,326\,9285$$

$$\log \text{Cosin } \frac{1}{2}(\tau - B) = 9,768\,5659$$

$$\log \text{Tang } \frac{1}{2}(90^{\circ} - \varepsilon) = 9,558\,3626$$

$$\frac{1}{2}(90^{\circ} - \varepsilon) = 19^{\circ} 53' 8,3''$$

$$90^{\circ} - \varepsilon = 39. 46. 16,6.$$

$$\varepsilon = 50. 13. 43,4.$$

die gefuchte Polhöhe.

Rechnung nach der zweyten Auflösungsart.

$$\log \text{Cosin } \tau = 9,922\,1477$$

$$\log \text{Cotang } \delta = 11,147\,5590$$

$$\log - \text{Tang } u = 11,069\,7067$$

$$u = 180^\circ - 85^\circ 7' 55''$$

$$= 94^\circ 52' 5''$$

$$\log - \text{Cosin } u = 8,928\,7102$$

$$\log \text{Sin } \eta = 9,680\,1719$$

$$\text{Summe} = 18,608\,8821$$

$$\log - \text{Sin } \delta = 8,851\,3431$$

$$\log + \text{Cosin } z = 9,757\,5390$$

$$z = 55^\circ 5' 50''$$

$$u = 94. 52. 5.$$

$$90^\circ - z = u - z = 39. 46. 15.$$

$$z = 50. 13. 45.$$

V i e r t e A u f g a b e.

Aus der Nördlichen Polhöhe $= \varepsilon$, der Abweichung eines Gestirns $= \delta \left\{ \begin{array}{l} \text{Nördl. } + \\ \text{Südl. } - \end{array} \right\}$ und der Höhe desselben $= \eta$; das Azimuth $= \alpha$ zu bestimmen.

Auflösung.

$$\begin{array}{l|l} SP = 90^\circ - \delta = a \\ SZ = 90^\circ - \eta = b \\ ZP = 90^\circ - \varepsilon = c \\ SZP = 180^\circ - \alpha = x \end{array} \left| \frac{a+b+c}{2} = S \right| \begin{array}{l} \text{Man sehe Taf. II.} \\ \text{Fig. XX.} \end{array}$$

Dies ist also der erste Fall schiefwinkliger Kugeldreiecke, und demnach

$$\sin \frac{1}{2} x = r \left(\frac{\sin (S-b) \cdot \sin (S-c)}{\sin b \cdot \sin c} \right)$$

Das gefuchte Azimuth $\alpha = 180^\circ - x$ ist

$\left\{ \begin{array}{l} \text{östlich, } \textit{orientale} \\ \text{westlich, } \textit{occidentale} \end{array} \right\}$ je nachdem die Sonne oder der Stern $\left\{ \begin{array}{l} \text{vor} \\ \text{nach} \end{array} \right\}$ dem Durchgange durch den Mittagskreis beobachtet wird.

Nach der Formel für $\sin \frac{1}{2} x$ liesse sich nun in jedem Falle die Rechnung anstellen; doch läßt sich noch eine andere bequemere Rechnungsart aus selbiger so herleiten: Es ist

$$S - b = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{90^\circ - \delta + \eta - \varepsilon}{2}$$

also

$$\sin (S-b) = \sin \left(\frac{90^\circ - \delta + \eta - \varepsilon}{2} \right) = \cos \left(\frac{\varepsilon + (90^\circ - \eta) + \delta}{2} \right)$$

Ferner ist

$$S - c = \frac{a + b + c}{2} - c = \frac{\varepsilon + (90^\circ - \eta) + \delta}{2} - \delta$$

also

$$\sin(S - c) = \sin\left(\frac{\varepsilon + (90^\circ - \eta) + \delta}{2} - \delta\right)$$

Endlich ist:

$$\sin b = \cos \eta$$

$$\sin c = \cos \varepsilon$$

$$\sin \frac{1}{2} x = \cos \frac{1}{2} \alpha$$

Dahero

$$\frac{\varepsilon + (90^\circ - \eta) + \delta}{2} = u \text{ gesetzt}$$

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = r \left(\frac{\cos u \cdot \sin(u - \delta)}{\cos \varepsilon \cdot \cos \eta} \right)$$

F ü n f t e A u f g a b e .

Es ist gegeben eines Gestirns Höhe $= \eta$, Abweichung $= \delta$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Nördl. } + \\ \text{Südl. } - \end{array} \right\}$
 und Azimuth $= \alpha$ Oestlich oder Westlich; man verlange
 den Stundenwinkel $= \tau$ und folglich die wahre Zeit der
 Beobachtung $= z$.

Auflösung.

Dies ist Fall 7 schiefwinkllicher Kugeldreiecke, folglich

$$\begin{array}{l|l} 180^\circ - \alpha = A & \\ 90^\circ - \delta = a & \text{Man sehe Tafel II,} \\ 90^\circ - \eta = b & \text{Fig. XXI.} \\ \tau = B & \end{array}$$

$$\sin B = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin a}$$

das ist

$$\sin \tau = \frac{\cosin \eta \cdot \sin \alpha}{\cosin \delta}$$

τ = in Graden des Aequators

= in Zeit der ersten Bewegung

z = Culmination des $\star$ $\pm \tau$ in Zeit

wenn α $\left\{ \begin{array}{l} \text{östlich} \\ \text{westlich} \end{array} \right\}$ ist.

Bey den Sonnenhöhen ist τ gewöhnlich spitzig,
 also da nicht zweydeutig.

S e c h s t e A u f g a b e.

Es ist eines Gestirns wahre Höhe $= \eta$, Abweichung $= \delta \left\{ \begin{smallmatrix} \text{Nö. } + \\ \text{Sü. } - \end{smallmatrix} \right\}$
und Azimuth $= \alpha$, Oestlich oder Westlich gegeben; man
verlangt die Nördliche Polhöhe $= \varepsilon$ zu wissen.

Auflösung.

Es ist dies Fall 9 schiefwinklchter Kugeldreiecke, und
der Nebenwinkel oder das Supplement des Azimuths

$$\begin{array}{l|l} \text{SZP} = 180^\circ - \alpha = A & \text{Man sehe} \\ \text{SZ} = 90^\circ - \eta = b & \text{Tafel II.} \\ \text{SP} = 90^\circ - \delta = a & \text{Fig XXI.} \end{array}$$

Man sucht $\text{ZP} = 90^\circ - \varepsilon = c$. Daher ist:

Die erste Auflösungsart.

$$\text{Sin B oder Sin } \tau = \frac{\text{Sin } b \cdot \text{Sin } A}{\text{Sin } a}$$

$$= \frac{\text{Cosin } \eta \cdot \text{Sin } \alpha}{\text{Cosin } \delta}$$

und

$$\text{Tang } \frac{1}{2} c = \frac{\text{Cosin } \frac{1}{2} (A + B) \cdot \text{Tang } \frac{1}{2} (a + b)}{\text{Cosin } \frac{1}{2} (A - B)}$$

oder

$$\text{Tang } \frac{1}{2} (90^\circ - \varepsilon) = \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (\alpha - \tau) \cdot \text{Cotang } \frac{1}{2} (\eta + \delta)}{\text{Sin } \frac{1}{2} (\alpha + \tau)}$$

Bey den Sonnenhöhen ist τ gewöhnlich spitzig, also
findet bey diesen keine Zweydeutigkeit statt.

Die zweyte Auflösungsart.

$$\text{Tang } u = \text{Cosin } A. \text{ Tang } b = -\text{Cosin } \alpha. \text{ Cotang } \eta;$$

$$\text{Cosin } z = \frac{\text{Cosin } u. \text{Cosin } a}{\text{Cosin } b} = \frac{\text{Cosin } u. \text{Sin } \delta}{\text{Sin } \eta};$$

$$u \pm z = c = 90^\circ - \epsilon.$$

Man nimmt die Summe $u + z$ wenn die Winkel A und B, die den gegebenen Seiten a und b gegenüberstehen, gleichartig sind; den Unterschied $u - z$ hingegen wenn diese Winkel ungleichartig sind. Da nun bey Sonnenhöhen gewöhnlich A stumpf und B spitzig ist, so fällt in diesem Falle die Zweydeutigkeit weg, und man hat $u - z = 90^\circ - \epsilon$.

Beyspiel 1. Für die Sonne.

$$\eta = 38^\circ 18' 46'' \text{ Vorm. oder Nachmittage.}$$

$$\delta = 19. 39. 10. \text{ Nördlich.}$$

$$\alpha = 72. 12. 54. \text{ Oestlich oder Westlich.}$$

Rechnung nach der ersten Auflösungsart.

log Cos $\eta = 9,894\ 6694$	log Sin $\frac{1}{2}(\alpha - \tau) = 9,233\ 4995$
log Sin $\alpha = 9,978\ 7325$	log Cot $\frac{1}{2}(\eta + \delta) = 10,256\ 5559$
Summe = $19,873\ 4019$	Summe = $19,490\ 0554$
log Cos $\delta = 9,973\ 9347$	log Sin $\frac{1}{2}(\alpha + \tau) = 9,947\ 3649$
log Sin $\tau = 9,899\ 4672$	log Tang $\frac{1}{2}(90^\circ - \epsilon) = 9,542\ 6905$
$\tau = 52^\circ 30' 0''$	$\frac{1}{2}(90^\circ - \epsilon) = 19^\circ 14' 0,4''$
$\alpha = 72. 12. 54.$	$90^\circ - \epsilon = 38. 28. 0,8.$
$\alpha - \tau = 19. 42. 54.$	$\epsilon = 51. 31. 59,2.$
$\frac{1}{2}(\alpha - \tau) = 9. 51. 27.$	die gefuchte Nördliche
$\alpha + \tau = 124. 42. 54.$	Polhöhe,
$\frac{1}{2}(\alpha + \tau) = 62. 21. 27.$	
$\eta + \delta = 57. 57. 56.$	
$\frac{1}{2}(\eta + \delta) = 28. 58. 58.$	

Rechnung nach der zweyten Auflösungsart.

log Cosin α	=	9,484 9345
log Cotang η	=	10,102 3099
log — Tang $21^{\circ} 8' 9''$	=	9,587 2444
u	=	$158^{\circ} 51' 51''$
log Cosin u	=	9,969 7551
log Sin δ	=	9,526 7517
Summe	=	19,496 5068
log Sin η	=	9,792 3595
log — Cosin $59^{\circ} 36' 9''$	=	9,704 1473
z	=	$120^{\circ} 23' 51''$
u	=	158. 51. 51.
$90^{\circ} - \epsilon = u - z$	=	38. 28. 0.
ϵ	=	51. 32. 0.

Beyspiel 2. Für die Sonne.

$$\begin{aligned}\eta &= 20^{\circ} 10' 0'' \\ \delta &= 19. 39. 10. \text{ Südlich.} \\ \alpha &= 33. 1. 43.\end{aligned}$$

Rechnung nach der zweyten Auflösungsart.

log Cosin α	=	9,923 4505
log Cotang η	=	10,435 0169
log — Tang $66^{\circ} 20' 37''$	=	10,358 4674
u	=	$113^{\circ} 39' 23''$
log — Cosin u	=	9,603 4158
log — Sin δ	=	9,526 7517
Summe	=	19,130 1675
log Sin η	=	9,537 5070
log + Cosin $66^{\circ} 57' 22''$	=	9,592 6605
z	=	$66^{\circ} 57' 22''$
u	=	113. 39. 23.
$90^{\circ} - \epsilon = u - z$	=	46. 42. 1.
ϵ	=	43. 17. 59.

M e t h o d e n
die
Länge und Breite eines Sterns
aus der
geraden Aufsteigung und Abweichung
desselben
und umgekehrt
zu berechnen.

Bedeutung der Buchstaben.

λ Länge des Sterns.

β Breite { Nördl. +
Südl. —

α Gerade Aufsteigung.

δ Abweichung { Nördl. +
Südl. —

θ Schiefe der Ekliptik.

r Halbmesser.

H ü l f s t a f e l

zur Verwandlung der trigonometrischen Linien
des zweyten, dritten und vierten Quadranten
in die des ersten Quadranten.

$$x < 90^\circ$$

$$R = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \sin x &= + \sin (2R - x) = + \cos (R - x) \\ &= - \sin (2R + x) = - \cos (R + x) \\ &= - \sin (4R - x) = - \cos (3R - x) \\ &= + \cos (3R + x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= - \cos (2R - x) = + \sin (R - x) \\ &= - \cos (2R + x) = + \sin (R + x) \\ &= + \cos (4R - x) = - \sin (3R - x) \\ &= - \sin (3R + x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan x &= - \tan (2R - x) = + \cot (R - x) \\ &= + \tan (2R + x) = - \cot (R + x) \\ &= - \tan (4R - x) = + \cot (3R - x) \\ &= - \cot (3R + x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot x &= - \cot (2R - x) = + \tan (R - x) \\ &= + \cot (2R + x) = - \tan (R + x) \\ &= - \cot (4R - x) = + \tan (3R - x) \\ &= - \tan (3R + x) \end{aligned}$$

Anmerkung.

Wenn die gerade Aufsteigung des Sterns in dem ersten oder in dem vierten Quadranten des Aequators sich befindet, so fällt die Länge des Sterns nie in den zweyten oder dritten Quadranten der Ekliptik.

Ist hingegen die gerade Aufsteigung in dem zweyten oder dritten Quadranten, so wird die Länge niemals in den ersten oder vierten Quadranten fallen.

Erste Methode die Länge zu finden.

Fall 1. Wenn $\frac{\text{Tang } \delta \cdot \text{Tang } \theta}{\text{Sin } \alpha}$ positiv:

$$\text{Tang } u = r \left(\frac{r \cdot \text{Tang } \delta \cdot \text{Tang } \theta}{\text{Sin } \alpha} \right);$$

$$\text{Tang } \lambda = \frac{r \cdot \text{Cosin } \theta \cdot \text{Tang } \alpha}{\text{Cosin } u \cdot \text{Cosin } u}.$$

Fall 2. Wenn $\frac{\text{Tang } \delta \cdot \text{Tang } \theta}{\text{Sin } \alpha}$ negativ, und

$$-\frac{\text{Tang } \delta \cdot \text{Tang } \theta}{\text{Sin } \alpha} < r:$$

$$\text{Cosin } u = r \left(-\frac{r \cdot \text{Tang } \delta \cdot \text{Tang } \theta}{\text{Sin } \alpha} \right);$$

$$\text{Tang } \lambda = \frac{\text{Sin } u \cdot \text{Sin } u \cdot \text{Cosin } \theta \cdot \text{Tang } \alpha}{r^3}.$$

Fall 3. Wenn $\frac{\text{Tang } \delta \cdot \text{Tang } \theta}{\text{Sin } \alpha}$ negativ, und

$$-\frac{\text{Tang } \delta \cdot \text{Tang } \theta}{\text{Sin } \alpha} > r:$$

$$\text{Cosin } u = r \left(-\frac{r^3 \cdot \text{Sin } \alpha}{\text{Tang } \delta \cdot \text{Tang } \theta} \right);$$

$$\text{Tang } \lambda = -\frac{\text{Tang } u \cdot \text{Tang } u \cdot \text{Cosin } \theta \cdot \text{Tang } \alpha}{r^3}.$$

Erste Methode die Breite zu finden.

Fall 1. Wenn $\frac{\text{Tang } \theta \cdot \text{Sin } \alpha}{\text{Tang } \delta}$ positiv und $< r$:

$$\text{Cosin } u = r \left(\frac{r \cdot \text{Tang } \theta \cdot \text{Sin } \alpha}{\text{Tang } \delta} \right);$$

$$\text{Sin } \beta = \frac{\text{Sin } u \cdot \text{Sin } u \cdot \text{Cosin } \theta \cdot \text{Sin } \delta}{r^3}.$$

Fall 2. Wenn $\frac{\text{Tang } \theta \cdot \text{Sin } \alpha}{\text{Tang } \delta}$ positiv und $> r$:

$$\text{Cosin } u = r \left(\frac{r^3 \cdot \text{Tang } \delta}{\text{Tang } \theta \cdot \text{Sin } \alpha} \right);$$

$$\text{Sin } \beta = \frac{\text{Tang } u \cdot \text{Tang } u \cdot \text{Cosin } \theta \cdot \text{Sin } \delta}{r^3}.$$

Fall 3. Wenn $\frac{\text{Tang } \theta \cdot \text{Sin } \alpha}{\text{Tang } \delta}$ negativ:

$$\text{Tang } u = r \left(- \frac{r \cdot \text{Tang } \theta \cdot \text{Sin } \alpha}{\text{Tang } \delta} \right);$$

$$\text{Sin } \beta = \frac{r \cdot \text{Cosin } \theta \cdot \text{Sin } \delta}{\text{Cosin } u \cdot \text{Cosin } u}.$$

Zweyte Methode die Länge zu finden.

$$\text{Tang } u = \frac{r \cdot \text{Sin } \alpha}{\text{Tang } \delta}; \quad \text{Tang } \lambda = \frac{\text{Tang } \alpha \cdot \text{Sin } (u + \theta)}{\text{Sin } u}$$

Zweyte Methode die Breite zu finden.

$$\text{Tang } u = \frac{r \cdot \text{Sin } \alpha}{\text{Tang } \delta}; \quad \text{Sin } \beta = \frac{\text{Sin } \delta \cdot \text{Cosin } (u + \theta)}{\text{Cosin } u}$$

Oder

$$\text{Tang } u = \frac{r \cdot \text{Sin } \alpha}{\text{Cotang } \theta}; \quad \text{Sin } \beta = \frac{\text{Cosin } \theta \cdot \text{Sin } (\delta - u)}{\text{Cosin } u}$$

Dritte Methode die Länge zu finden.

Nach Fall 3 schiefwinklichter Kugeldreiecke num. 7.
Seite 81 ist:

$b = \theta$ oder $= 90^\circ - \delta$ die grössere Seite.

$c = 90^\circ - \delta$ oder $= \theta$ die kleinere Seite.

$A = 90^\circ + \alpha$

und wenn b als die grössere Seite $= 90^\circ - \delta$, der gefuchte Winkel

$$90^\circ - \lambda = \frac{1}{2} (B + C) + \frac{1}{2} (B - C) = B;$$

wenn aber c als die kleinere Seite $= 90^\circ - \delta$, der gefuchte Winkel

$$90^\circ - \lambda = \frac{1}{2} (B + C) - \frac{1}{2} (B - C) = C.$$

Dritte Methode die Breite zu finden.

Nach Fall 4 schiefwinklicher Kugeldreiecke Formel 4. Seite 82 ist:

$$\begin{aligned} a &= 90^\circ - \delta \text{ oder } = \theta, \text{ allezeit die grössere Seite} \\ c &= \theta \text{ oder } = 90^\circ - \delta, \text{ — — kleinere —} \\ B &= 90^\circ + \alpha \\ b &= 90^\circ - \beta \end{aligned}$$

Oder nach Fall 4 schiefwinklicher Kugeldreiecke Fo. 5. Seite 82 kann man setzen:

$$a = 90^\circ - \delta; \quad c = \theta; \quad B = 90^\circ + \alpha; \quad b = 90^\circ - \beta.$$

Vierte Methode die Länge und Breite zu finden.

$$\text{Tang } u = \frac{\text{Cotang } \frac{1}{2}(90^\circ + \alpha) \cdot \text{Sin } (\theta \text{ oder } (90^\circ - \delta))}{\text{Sin } (\theta + (90^\circ - \delta))}$$

$$\text{Großes Segment} = \frac{1}{2}(90^\circ + \alpha) + u$$

$$\text{Kleines Segment} = \frac{1}{2}(90^\circ + \alpha) - u$$

$$\text{Tang } \lambda = \frac{\text{Cosin } \theta \cdot \text{Tang des } \left\{ \begin{smallmatrix} \text{großen} \\ \text{kleinen} \end{smallmatrix} \right\} \text{ Segments}}{r}$$

In dieser letzten Gleichung nimmt man, wenn θ $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{größer} \\ \text{kleiner} \end{smallmatrix} \right\}$ als $90^\circ - \delta$ ist, das $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{große} \\ \text{kleine} \end{smallmatrix} \right\}$ Segment; und wenn das kleine Segment negativ und $< 90^\circ$ sich findet, so setzt man die Tangente dieses Segments negativ.

$$\text{Cosin } \beta = \frac{\text{Cosin } \alpha \cdot \text{Cosin } \delta}{\text{Cosin } \lambda}$$

Fünfte Methode die Länge und Breite zu finden.

Wenn die gerade Aufsteigung α in dem 2ten Quadranten sich befindet, so gebraucht man in den folgenden Formeln $180^\circ - \alpha$ anstatt der gegebenen α . Ist α im

3ten Quadranten, so nimmt man $\alpha - 180^\circ$ statt α ; und wenn α in 4ten Quadranten fällt, so bedient man sich für α des Bogens $360^\circ - \alpha$.

Nach dieser Vorbereitung geben folgende Formeln die Auflösung:

$$\text{I. Cotang } x = \frac{\text{Sin } \alpha \cdot \text{Cotang } \delta}{r}$$

$$x \pm \theta = y$$

der Unterschied, wenn δ und α , beyde Nördlich, oder Südlich find; die Summe im entgegengesetzten Falle. Es heisst aber α Nö. von $0^\circ - 180^\circ$ und Sü. von $180^\circ - 360^\circ$. Noch ist, wenn man den Unterschied nimmt, der folgenden Num. IV. wegen, anzumerken, ob $\theta <$ oder $> x$ ist.

$$\text{II. Cosin } z = \frac{\text{Cosin } \alpha \cdot \text{Cosin } \delta}{r}$$

$$\text{III. Tang } \lambda = \frac{\text{Cosin } y \cdot \text{Tang } z}{r}$$

a) In dem 1sten Quadranten von α ist λ die gesuchte Länge;

Im 2ten Quad. v. α , ist diese Länge $= 6 Z - \lambda$;

— 3. — — — — — $= 6 Z + \lambda$;

— 4. — — — — — $= 12 Z - \lambda$;

dies gilt wenn y spitzig ist.

b) Ist aber $y > 90^\circ$, so gebraucht man in der Rechnung, desselben Supplement, und es ist

Im 1sten Quadranten von α :

die gesuchte Länge $= 12 Z - \lambda$;

Im 2ten Quadranten von α :

die gesuchte Länge $= 6 Z + \lambda$;

Im 3ten Quadranten von α :

die gesuchte Länge $= 6 Z - \lambda$;

Im 4ten Quadranten von α :

die gesuchte Länge $= \lambda$.

$$\text{IV. Sin } \beta = \frac{\text{Sin } y \cdot \text{Sin } z}{r}$$

β ist mit δ von einerley Benennung, ausgenommen wenn in I. x von θ , um y zu finden, hat subtrahirt werden müssen, indem $\theta > x$ gefunden ward.

Sechste Methode die Länge und Breite zu finden.

Anstatt der gegebenen geraden Aufsteigung α , nimmt man den Abstand vom nächsten Aequinoktialpunkte. Nemlich

Für α	gebraucht man
im 1ten Quadranten	α
— 2ten — —	$180^\circ - \alpha$
— 3ten — —	$\alpha - 180^\circ$
— 4ten — —	$360^\circ - \alpha$

Nun löst man folgende Gleichungen auf:

$$\text{I) Tang } u = \frac{\text{Sin } \alpha \cdot \text{Cotang } \delta}{r}$$

$$u \pm \theta = z$$

die Summe im 1ten und 2ten Quadranten von α , der Unterschied im 3ten und 4ten.

$$\text{II) Sin } \beta = \frac{\text{Cosin } z \cdot \text{Sin } \delta}{\text{Cosin } u}$$

β ist mit δ von einerley Benennung, ausgenommen wenn z und u ungleichartig sind.

$$\text{III) Cotang } x = \frac{\text{Sin } z \cdot \text{Tang } \alpha}{\text{Sin } u}; \text{ Oder:}$$

$$\text{Cosin } x = \frac{\text{Tang } \beta \cdot \text{Tang } z}{r}$$

In den beyden letzten Quadranten von α ist x stumpf wenn $u > \theta$. Endlich hat man

Im 1ten Quadranten von α :

$$\lambda = 3 Z - x;$$

Im 2ten und 3ten Quadranten von α :

$$\lambda = 3 Z + x;$$

Im 4ten Quadranten von α :

$$\lambda = 3 Z - x \text{ für } x < 90^\circ$$

$$= 15 Z - x \text{ für } x \text{ stumpf.}$$

Siebente Methode die Länge und Breite zu finden.

A) Wenn die Rectascension in 1ten und 2ten Quadranten fällt:

$$\text{Tang } \frac{1}{2}[x + (90^\circ - \lambda)] = \frac{\text{Cos } [\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ] \cdot \text{Tang}(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}{\text{Cosin } [\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ]};$$

$$\text{Tang } \frac{1}{2}[x - (90^\circ - \lambda)] = \frac{\text{Sin } [\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ] \cdot \text{Tang}(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}{\text{Sin } [\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ]};$$

$$\frac{1}{2}[x + (90^\circ - \lambda)] - \frac{1}{2}[x - (90^\circ - \lambda)] = 90^\circ - \lambda;$$

$$\text{Cosin } \beta = \frac{\text{Cosin } \alpha \cdot \text{Cosin } \delta}{\text{Cosin } \lambda}.$$

B) Wenn die Rectascension im 3ten und 4ten Quadranten ist:

$$\text{Tang } \frac{1}{2}[x + (\lambda - 90^\circ)] = \frac{\text{Cos } [\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ] \cdot \text{Tang}(\frac{1}{2}\alpha - 45^\circ)}{\text{Cosin } [\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ]};$$

$$\text{Tang } \frac{1}{2}[x - (\lambda - 90^\circ)] = \frac{\text{Sin } [\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ] \cdot \text{Tang}(\frac{1}{2}\alpha - 45^\circ)}{\text{Sin } [\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ]};$$

$$\frac{1}{2}[x + (\lambda - 90^\circ)] - \frac{1}{2}[x - (\lambda - 90^\circ)] = \lambda - 90^\circ;$$

$$\text{Cosin } \beta = \frac{\text{Cosin } \alpha \cdot \text{Cosin } \delta}{\text{Cosin } \lambda}.$$

Achte Methode die Länge und Breite zu finden.

A) Wenn die Rectascension α unter 180° ist:

$$\sin \beta = \sin (\delta - \theta) + (1 - \sin \alpha) \cdot \sin \theta \cdot \cos \delta;$$

$$\cos \lambda = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \delta}{\cos \beta}.$$

B) Wenn die Rectascension über 180° beträgt:

$$\sin \beta = \sin (\delta + \theta) - (1 + \sin \alpha) \cdot \sin \theta \cdot \cos \delta;$$

$$\cos \lambda = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \delta}{\cos \beta}.$$

Neunte Methode die Länge und Breite zu finden.

$$\text{Tang } u = \frac{\sin \alpha \cdot \text{Cotang } \delta}{r}$$

$$\sin \beta = \frac{\sin \delta \cdot \cos (\theta + u)}{\cos u}$$

$$\sin \lambda = \frac{\text{Tang } \beta \cdot \text{Tang } (\theta + u)}{r}$$

Erste Methode die gerade Aufsteigung zu finden.

Fall 1. Wenn $\frac{\text{Tang } \theta \cdot \text{Tang } \beta}{\text{Sin } \lambda}$ bejaht u. $< r$:

$$\text{Cosin } u = r \left(\frac{r \cdot \text{Tang } \theta \cdot \text{Tang } \beta}{\text{Sin } \lambda} \right);$$

$$\text{Tang } \alpha = \frac{\text{Sin } u \cdot \text{Sin } u \cdot \text{Cosin } \theta \cdot \text{Tang } \lambda}{r^3}.$$

Fall 2. Wenn $\frac{\text{Tang } \theta \cdot \text{Tang } \beta}{\text{Sin } \lambda}$ bejaht u. $> r$:

$$\text{Cosin } u = r \left(\frac{r^3 \cdot \text{Sin } \lambda}{\text{Tang } \theta \cdot \text{Tang } \beta} \right);$$

$$\text{Tang } \alpha = - \frac{\text{Tang } u \cdot \text{Tang } u \cdot \text{Cosin } \theta \cdot \text{Tang } \lambda}{r^3}$$

Fall 3. Wenn $\frac{\text{Tang } \theta \cdot \text{Tang } \beta}{\text{Sin } \lambda}$ verneint:

$$\text{Tang } u = r \left(- \frac{r \cdot \text{Tang } \theta \cdot \text{Tang } \beta}{\text{Sin } \lambda} \right);$$

$$\text{Tang } \alpha = \frac{r \cdot \text{Cosin } \theta \cdot \text{Tang } \lambda}{\text{Cosin } u \cdot \text{Cosin } u}.$$

Erste Methode die Abweichung zu finden.

Fall 1. Wenn $\frac{\text{Tang } \theta \cdot \text{Sin } \lambda}{\text{Tang } \beta}$ bejaht:

$$\text{Tang } u = r \left(\frac{r \cdot \text{Tang } \theta \cdot \text{Sin } \lambda}{\text{Tang } \beta} \right);$$

$$\text{Sin } \delta = \frac{r \cdot \text{Cosin } \theta \cdot \text{Sin } \beta}{\text{Cosin } u \cdot \text{Cosin } u}.$$

Fall 2. Wenn $\frac{\text{Tang } \theta \cdot \text{Sin } \lambda}{\text{Tang } \beta}$ bejaht und $< r$:

$$\text{Cosin } u = r \left(- \frac{r \cdot \text{Tang } \theta \cdot \text{Sin } \lambda}{\text{Tang } \beta} \right);$$

$$\text{Sin } \delta = \frac{\text{Sin } u \cdot \text{Sin } u \cdot \text{Cosin } \theta \cdot \text{Sin } \beta}{r^3}.$$

Fall 3. Wenn $\frac{\text{Tang } \theta \cdot \text{Sin } \lambda}{\text{Tang } \beta}$ bejaht und $> r$:

$$\text{Cosin } u = r \left(- \frac{r^3 \cdot \text{Tang } \beta}{\text{Tang } \theta \cdot \text{Sin } \lambda} \right);$$

$$\text{Sin } \delta = \frac{\text{Tang } u \cdot \text{Tang } u \cdot \text{Cosin } \theta \cdot \text{Sin } \beta}{r^3}.$$

Zweyte Methode die gerade Aufsteigung zu finden.

$$\text{Tang } u = \frac{r \cdot \sin \lambda}{\text{Tang } \beta}; \text{Tang } \alpha = \frac{\text{Tang } \lambda \cdot \sin (u - \theta)}{\sin u}.$$

Zweyte Methode die Abweichung zu finden.

$$\text{Tang } u = \frac{r \cdot \sin \lambda}{\text{Tang } \beta}; \sin \delta = \frac{\sin \beta \cdot \cos (u - \theta)}{\cos u}.$$

Oder

$$\text{Tang } u = \frac{r \cdot \sin \lambda}{\text{Cotang } \theta}; \sin \delta = \frac{\cos \theta \cdot \sin (u + \beta)}{\cos u}.$$

Dritte Methode die gerade Aufsteigung zu finden.

Fall 3 schiefwinklichter Kugeldreiecke num. 7.
Seite 81 setzt man:

$$\left. \begin{array}{l} b = 90^\circ - \beta \text{ oder } = \theta \text{ grösere} \\ c = \theta \text{ oder } = 90^\circ - \beta \text{ kleinere} \end{array} \right\} \text{ Seite.}$$

$$A = 90^\circ - \lambda.$$

Ist nun die *grösere* Seite $b = 90^\circ - \beta$; so ist der gefuchte Winkel:

$$90^\circ + \alpha = \frac{1}{2} (B + C) + \frac{1}{2} (B - C) = B.$$

Hingegen wenn die *kleinere* Seite $c = 90^\circ - \beta$; so ist der gefuchte Winkel:

$$90^\circ + \alpha = \frac{1}{2} (B + C) - \frac{1}{2} (B - C) = C.$$

Dritte Methode die Abweichung zu finden.

Fall 4 schiefwinklicher Kugeldreiecke Formel 4, Seite 82 setze man

$$\left. \begin{array}{l} a = 90^\circ - \beta \text{ oder } = \theta \text{ allemal der grössern} \\ c = \theta \text{ oder } = 90^\circ - \beta \text{ — — — kleinern} \\ B = 90^\circ - \lambda; \\ b = 90^\circ - \delta. \end{array} \right\} \text{Seite gleich.}$$

Oder Fall 4 schiefwinklicher Kugeldreiecke Formel 5, Seite 82 wird gesetzt:

$$a = 90^\circ - \beta; \quad c = \theta; \quad B = 90^\circ - \lambda; \quad b = 90^\circ - \delta.$$

Vierte Methode die gerade Aufsteigung und Abweichung zu finden.

$$\text{Tang } u = \frac{\text{Cotang } \frac{1}{2}(90^\circ - \lambda) \cdot \text{Sin } (\theta \text{ u } (90^\circ - \beta))}{\text{Sin } (\theta + (90^\circ - \beta))};$$

$$\text{Großes Segment} = \frac{1}{2}(90^\circ - \lambda) + u;$$

$$\text{Kleines Segment} = \frac{1}{2}(90^\circ - \lambda) - u;$$

$$\text{Tang } \alpha = \frac{\text{Cosin } \theta \cdot \text{Tang des } \left\{ \begin{array}{c} \text{großen} \\ \text{kleinen} \end{array} \right\} \text{ Segments}}{r};$$

In dieser letztern Gleichung gebraucht man, wenn θ $\left\{ \begin{array}{c} \text{größer} \\ \text{kleiner} \end{array} \right\}$ als $90^\circ - \beta$ ist, das $\left\{ \begin{array}{c} \text{große} \\ \text{kleine} \end{array} \right\}$ Segment; und wenn das kleine Segment negativ und $< 90^\circ$ erhalten wird, so setzt man die Tangente dieses Segments negativ.

$$\text{Cosin } \delta = \frac{\text{Cosin } \lambda \cdot \text{Cosin } \beta}{\text{Cosin } \alpha}$$

Fünfte Methode die gerade Aufsteigung und Abweichung zu finden.

Ist die gegebene Länge λ im 2ten Quadranten, so nimmt man $180^\circ - \lambda$ oder $6 Z - \lambda$; ist sie im 3ten Quadranten, so nimmt man $\lambda - 180^\circ$ oder $\lambda - 6 Z$; und wenn sie im 4ten Quadranten ist, so gebraucht man $360^\circ - \lambda$ oder $12 Z - \lambda$, statt λ in den folgenden nun zu berechnenden Gleichungen:

$$\text{I. Cotang } x = \frac{\text{Sin } \lambda \cdot \text{Cotang } \beta}{r}$$

$$x \overset{+}{\underset{-}{\frown}} \theta = y$$

man nimmt die Summe wenn der Stern in den 6 ersten Zeichen ist und eine Nördliche Breite hat, desgleichen wenn er in den 6 letzten Zeichen ist, und eine Südliche Breite hat;

man nimmt den Unterschied wenn in den 6 ersten Zeichen der Länge der Stern eine Südliche Breite hat, desgleichen wenn er in den 6 letzten Zeichen der Länge ist, und eine Nördliche Breite hat.

$$\text{II. Cosin } z = \frac{\text{Cosin } \lambda \cdot \text{Cosin } \beta}{r}$$

$$\text{III. Tang } \alpha = \frac{\text{Cosin } y \cdot \text{Tang } z}{r}.$$

a) Wird $y < 90^\circ$ erhalten, so ist der num. III. gefundene Bogen α , wenn die gegebene Länge λ in den ersten Quadranten fällt, die gesuchte gerade Aufsteigung.

Fällt aber die Länge λ in den 2ten Quadranten, so ist die gerade Aufsteigung $180^\circ - \alpha$.

Fällt λ in den 3ten Quadranten, so ist die gesuchte Rectascension $= 180^\circ + \alpha$. Und endlich

Für λ in dem 4ten Quadranten, wird die gesuchte gerade Aufsteigung $= 360^\circ - \alpha$ seyn.

b) *Kömm* $y > 90^\circ$ *heraus*, so gebraucht man $180^\circ - y$,
und dann ist

In dem 1ten Quadranten von λ :

die gefuchte gerade Aufsteigung $= 360^\circ - \alpha$;

In dem 2ten Quadranten von λ :

die gefuchte gerade Aufsteigung $= 180^\circ + \alpha$;

Im 3ten Quadranten von λ :

die gefuchte gerade Aufsteigung $= 180^\circ - \alpha$;

Im 4ten Quadranten von λ :

die gefuchte gerade Aufsteigung $= \alpha$.

$$\text{IV. } \sin \delta = \frac{\sin y \cdot \sin z}{r}$$

die gefuchte Abweichung δ ist mit der gegebenen
Breite β von einerley Benennung; den Fall aus-
genommen da x in I, von θ subtrahirt werden
musste, weil $\theta > x$ war.

Drey Beyspiele zur 1sten Methode λ zu finden.

1) $\alpha = 12^\circ 28' 40''$; $\delta = +88^\circ 10' 50''$ d.i. Nö. $\theta = 23^\circ 28' 0''$

$$10 + \log \text{Tang } \delta = 21,4980378$$

$$+ \log \text{Tang } \theta = 9,6376106$$

$$\text{Summe} = 31,1356484$$

$$- \log \text{Sin } \alpha = 9,3345763$$

$$2. \log \text{Tang } u = 21,8010721$$

$$\log \text{Tang } u = 10,9005360$$

$$u = 82^\circ 50' 0,22''$$

$$10 + \log \text{Cosin } \theta = 19,9625076$$

$$+ \log \text{Tang } \alpha = 9,3449574$$

$$\text{Summe} = 29,3074650$$

$$- 2. \log \text{Cosin } u = 18,1921156$$

$$\log \text{Tang } \lambda = 11,1153494$$

$$\lambda = 85^\circ 36' 55,65''$$

$$= 2 \text{ Z. } 25. 36. 55,65.$$

$$= \text{II } 25. 36. 55,65.$$

2) $\alpha = 139^\circ 18' 30''$; $\delta = -7^\circ 45' 0''$ d.i. Sü. $\theta = 23^\circ 28' 0''$

$$\log \text{Tang } \delta = 9,1338391$$

$$\log \text{Tang } \theta = 9,6376106$$

$$\text{Summe} = 18,7714497$$

$$\log \text{Sin } 40^\circ 41' 30'' = 9,8142397$$

$$2. \log \text{Cosin } u = 18,9572100$$

$$\log \text{Cosin } u = 9,4786050$$

$$u = 72^\circ 28' 50,6''$$

$$2. \log \text{Sin } u = 19,9587468$$

$$\log \text{Cosin } \theta = 9,9625076$$

$$\log \text{Tang } 40^\circ 41' 30'' = 9,9344392$$

$$\log \text{Tang } 35^\circ 39' 5'' = 9,8556936$$

$$\text{subtr. von } 180. \quad 0. \quad 0.$$

$$\lambda = 144. 20. 55. = 4 \text{ Z. } 24^\circ 20' 55''$$

$$= \text{Q } 24. 20. 55.$$

$$3) \alpha = 359^{\circ} 22' 33''; \delta = +27^{\circ} 55' 37'' \text{ di. Nö. } \theta = 23^{\circ} 28' 0''$$

$$\log \text{Tang } \delta = 9,724\,3373$$

$$\log \text{Tang } \theta = 9,637\,6106$$

$$\text{Summe} = 19,361\,9479$$

$$30 + \log \text{Sin } 0^{\circ} 37' 27'' = 38,037\,1693$$

$$2. \log \text{Cosin } u = 18,675\,2214$$

$$\log \text{Cosin } u = 9,337\,6107$$

$$u = 77^{\circ} 26' 0''$$

$$2. \log \text{Tang } u = 21,503\,7186$$

$$\log \text{Cosin } \theta = 9,962\,5076$$

$$\log \text{Cotang } 89^{\circ} 22' 33'' = 8,037\,1951$$

$$\log \text{Tang } \lambda = 9,303\,4213$$

$$\lambda = 11^{\circ} 22' 14,72''$$

$$= 0^{\circ} \text{Z. } 11. 22. 14,72.$$

$$= \gamma 11. 22. 14,72.$$

Drey Beyspiele zur 2ten Methode λ zu finden.

$$1) \alpha = 12^\circ 28' 40''; \delta = +88^\circ 10' 50''; \theta = 23^\circ 28' 0''$$

$$10 + \log \sin \alpha = 19,3345763$$

$$- \log \tan \delta = 11,4980378$$

$$\log \tan u = 7,8365385$$

$$u = 0^\circ 23' 35,65''$$

$$\theta = 23. 28. 0.$$

$$u + \theta = 23. 51. 35,65.$$

$$\log \sin (u + \theta) = 9,6069203$$

$$+ \log \tan \alpha = 9,3449574$$

$$\text{Summe} = 18,9518777$$

$$- \log \sin u = 7,8365273$$

$$\log \tan \lambda = 11,1153504$$

$$\lambda = 85^\circ 36' 55,68''$$

$$2Z = \Pi = 60. 0. 0.$$

$$\lambda = 2Z. 25. 36. 55,68.$$

$$2) \alpha = 139^\circ 18' 30''; \delta = -7^\circ 45' 0''; \theta = 23^\circ 28' 0''$$

$$10 + \log \sin \alpha = 19,8142397$$

$$- \log \tan \delta = 9,1338391$$

$$\log \tan u = 10,6804006$$

$$u = -78^\circ 12' 34''$$

$$\theta = 23. 28. 0.$$

$$u + \theta = -54. 44. 34.$$

$$\log \sin (u + \theta) = 9,9119928$$

$$+ \log \tan \alpha = 9,9344392$$

$$\text{Summe} = 19,8464320$$

$$- \log \sin u = 9,9907388$$

$$\log \tan 35^\circ 39' 5'' = 9,8556932$$

$$180. 0. 0.$$

$$144^\circ 20' 55''$$

$$120. 0. 0. = 4Z. = \Omega$$

$$4Z. 24^\circ 20' 55'' \text{ die gefuchte Länge } \lambda.$$

$$3) \alpha = 359^{\circ} 22' 33''; \delta = +27^{\circ} 55' 37''; \theta = 23^{\circ} 28' 0''$$

$$10 + \log \sin \alpha = 18,037\,1693$$

$$- \log \tan \delta = 9,724\,3373$$

$$\log \tan u = 8,312\,8320$$

$$u = 1^{\circ} 10' 38,34''$$

$$\theta = 23^{\circ} 28' 0''$$

$$u + \theta = +22^{\circ} 17' 21,66''$$

$$\log \sin (u + \theta) = 9,578\,9647$$

$$+ \log \tan \alpha = 8,037\,1951$$

$$\text{Summe} = 17,616\,1598$$

$$- \log \sin u = 8,312\,7401$$

$$\log \tan \lambda = 9,303\,4197$$

$$\lambda = 11^{\circ} 22' 14,56''$$

$$= \text{OZ. } 11^{\circ} 22' 14,56'' \text{ die gefuchte Länge des Sterns.}$$

Drey Beyspiele zur 3ten Methode λ zu finden.

$$1) \alpha = 12^\circ 28' 40''; \delta = +88^\circ 10' 50''; \theta = 23^\circ 28' 0''$$

$$\begin{array}{r} 90^\circ \quad 0' \quad 0'' \\ \delta = +88. \quad 10. \quad 50. \end{array}$$

$$90^\circ - \delta = 1. \quad 49. \quad 10. = c$$

$$\theta = 23. \quad 28. \quad 0. = b$$

$$90^\circ + \alpha = 102. \quad 28. \quad 40. = A$$

$$\frac{1}{2} A = 51. \quad 14. \quad 20.$$

$$b - c = 21. \quad 38. \quad 50.$$

$$b + c = 25. \quad 17. \quad 10.$$

$$\frac{1}{2}(b - c) = 10. \quad 49. \quad 25.$$

$$\frac{1}{2}(b + c) = 12. \quad 38. \quad 35.$$

$$\log \text{Cosin } \frac{1}{2}(b - c) = 9,992 \, 2043$$

$$+ \log \text{Cotang } \frac{1}{2} A = 9,904 \, 6635$$

$$\text{Summe} = 19,896 \, 8678$$

$$- \log \text{Cosin } \frac{1}{2}(b + c) = 9,989 \, 3397$$

$$\log \text{Tang } \frac{1}{2}(B + C) = 9,907 \, 5281$$

$$\frac{1}{2}(B + C) = 38^\circ 56' 44,66''$$

$$\log \text{Sin } \frac{1}{2}(b - c) = 9,273 \, 6634$$

$$+ \log \text{Cotang } \frac{1}{2} A = 9,904 \, 6635$$

$$\text{Summe} = 19,178 \, 3269$$

$$- \log \text{Sin } \frac{1}{2}(b + c) = 9,340 \, 1993$$

$$\log \text{Tang } \frac{1}{2}(B - C) = 9,838 \, 1276$$

$$\frac{1}{2}(B - C) = 34^\circ 33' 40,31''$$

$$\frac{1}{2}(B + C) = 38. \quad 56. \quad 44,66.$$

$$90^\circ - \lambda = \frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(B - C) = C = 4. \quad 23. \quad 4,35.$$

$$90. \quad 0. \quad 0.$$

$$\lambda = 85. \quad 36. \quad 55,65.$$

$$2) \alpha = 139^{\circ} 18' 30''; \delta = -7^{\circ} 45' 0''; \theta = 23^{\circ} 28' 0''$$

$$\begin{array}{r} 90^{\circ} \quad 0' \quad 0'' \\ \delta = -7. \quad 45. \quad 0. \end{array}$$

$$90^{\circ} - \delta = 97. \quad 45. \quad 0. = b$$

$$\theta = 23. \quad 28. \quad 0. = c$$

$$90^{\circ} + \alpha = 229. \quad 18. \quad 30. = A$$

$$\frac{1}{2} A = 114. \quad 39. \quad 15.$$

$$b - c = 74. \quad 17. \quad 0.$$

$$b + c = 121. \quad 13. \quad 0.$$

$$\frac{b - c}{2} = 37. \quad 8. \quad 30.$$

$$\frac{b + c}{2} = 60. \quad 36. \quad 30.$$

$$\log \cos \frac{1}{2} (b - c) = 9,9015374$$

$$+ \log \cot \frac{1}{2} A = 9,6617935$$

$$\text{Summe} = 19,5633309$$

$$- \log \cos \frac{1}{2} (b + c) = 9,6908842$$

$$\log \tan - 36^{\circ} 42' 16'' = 9,8724467$$

$$\frac{1}{2} (B + C) = - 36^{\circ} 42' 16''$$

$$\log \sin \frac{1}{2} (b - c) = 9,7808844$$

$$+ \log \cot \frac{1}{2} A = 9,6617935$$

$$\text{Summe} = 19,4426779$$

$$- \log \sin \frac{1}{2} (b + c) = 9,9401603$$

$$\log \tan - 17^{\circ} 38' 38,8'' = 9,5025176$$

$$\frac{1}{2} (B - C) = - 17^{\circ} 38' 38,8''$$

$$\frac{1}{2} (B + C) = - 36. \quad 42. \quad 16.$$

$$90^{\circ} - \lambda = B = - 54. \quad 20. \quad 54,8$$

$$90. \quad 0. \quad 0.$$

$$90^{\circ} - B = \lambda = 144. \quad 20. \quad 54,8$$

$$3) \alpha = 359^{\circ} 22' 33''; \delta = +27^{\circ} 55' 37''; \theta = 23^{\circ} 28' 0''.$$

$$\begin{array}{r} 90^{\circ} \quad 0' \quad 0'' \\ \delta = +27. \quad 55. \quad 37. \\ \hline 90^{\circ} - \delta = 62. \quad 4. \quad 23. = b \\ \theta = 23. \quad 28. \quad 0. = c \\ \alpha = 359. \quad 22. \quad 33. \\ 90. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 90^{\circ} + \alpha = 89. \quad 22. \quad 33. = A \\ \frac{1}{2} A = 44. \quad 41. \quad 16,5. \\ b - c = 38. \quad 36. \quad 23. \\ \frac{b - c}{2} = 19. \quad 18. \quad 11,5. \\ b + c = 85. \quad 32. \quad 23. \\ \frac{b + c}{2} = 42. \quad 46. \quad 11,5. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log \cos \frac{1}{2} (b - c) = 9,9748719 \\ + \log \cotang \frac{1}{2} A = 10,0047312 \end{array}$$

$$\text{Summe} = 19,9796031$$

$$- \log \cos \frac{1}{2} (b + c) = 9,8657477$$

$$\log \tan \frac{1}{2} (B + C) = 10,1138554$$

$$\frac{1}{2} (B + C) = 52^{\circ} 25' 32,88''$$

$$\log \sin \frac{1}{2} (b - c) = 9,5192595$$

$$+ \log \cotang \frac{1}{2} A = 10,0047312$$

$$\text{Summe} = 19,5239907$$

$$- \log \sin \frac{1}{2} (b + c) = 9,8319051$$

$$\log \tan \frac{1}{2} (B - C) = 9,6920856$$

$$\frac{1}{2} (B - C) = 26^{\circ} 12' 12,54''$$

$$\frac{1}{2} (B + C) = 52. \quad 25. \quad 32,88.$$

$$\begin{array}{r} \text{Summe: } 90^{\circ} - \lambda = B = 78. \quad 37. \quad 45,42. \\ 90. \quad 0. \quad 0. \end{array}$$

$$\lambda = 11. \quad 22. \quad 14,58.$$

Beyispiel zur 1ten Methode β zu finden.

$$\alpha = 12^\circ 28' 40''; \delta = +88^\circ 10' 50''; \theta = 23^\circ 28' 0''$$

$$\log \text{Tang } \theta = 9,6376106$$

$$+ \log \text{Sin } \alpha = 9,3345763$$

$$\text{Summe} = 18,9721869$$

$$- \log \text{Tang } \delta = 11,4980378$$

$$2. \log \text{Cosin } u = 17,4741491$$

$$\log \text{Cosin } u = 8,7370745$$

$$u = 86^\circ 52' 15,4''$$

$$\log \text{Sin } u = 9,9993520$$

$$2. \log \text{Sin } u = 19,9987040$$

$$+ \log \text{Cosin } \theta = 9,9625076$$

$$+ \log \text{Sin } \delta = 9,9997810$$

$$\log \text{Sin } \beta = 9,9609926$$

$$\beta = 66^\circ 4' 40,43'' \text{ Nö.}$$

Beyispiel zur 2ten Methode β zu finden.

$$\alpha = 12^\circ 28' 40''; \delta = +88^\circ 10' 50''; \theta = 23^\circ 28' 0''$$

$$10 + \log \text{Sin } \alpha = 19,3345763$$

$$- \log \text{Tang } \delta = 11,4980378$$

$$\log \text{Tang } u = 7,8365385$$

$$u = 0^\circ 23' 35,65''$$

$$\theta = 23. 28. 0.$$

$$u + \theta = 23. 51. 35,65.$$

$$\log \text{Cosin } (u + \theta) = 9,9612014$$

$$+ \log \text{Sin } \delta = 9,9997810$$

$$\text{Summe} = 19,9609824$$

$$- \log \text{Cosin } u = 9,9999898$$

$$\log \text{Sin } \beta = 9,9609926$$

$$\beta = +66^\circ 4' 40,43'' \text{ d. i. Nördlich.}$$

Oder

$$\begin{array}{rcl}
 10 + \log \sin \alpha & = & 19,3345763 \\
 - \log \cotang \theta & = & 10,3623894 \\
 \hline
 \log \Tang u & = & 8,9721869 \\
 u & = & 5^\circ 21' 30,49'' \\
 \delta & = & + 88. 10. 50. \\
 \hline
 \delta - u & = & 82. 49. 19,51 \\
 \log \sin (\delta - u) & = & 9,9965829 \\
 + \log \cosin \theta & = & 9,9625076 \\
 \hline
 \text{Summe} & = & 19,9590905 \\
 - \log \cosin u & = & 9,9980979 \\
 \hline
 \log \sin \beta & = & 9,9609926 \\
 \beta & = & 66^\circ 4' 40,43'' \text{ Nö.}
 \end{array}$$

Beyspiel zur 3ten Methode β zu finden.

$$\alpha = 12^\circ 28' 40''; \delta = +88^\circ 10' 50''; \theta = 23^\circ 28' 0''$$

$$\begin{array}{r} 90^\circ 0' 0'' \\ \delta = +88. 10. 50. \\ \hline 90^\circ - \delta = 1^\circ 49' 10'' = c \\ \angle \theta = a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} B = 102. 28. 40. \\ \frac{1}{2} B = 51. 14. 20. \\ a = 23. 28. 0. \\ c = 1. 49. 10. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a - c = 21. 38. 50. \\ \frac{1}{2}(a - c) = 10. 49. 25. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log \sin \frac{1}{2} B = 9,8919627 \\ + \log \sin \frac{1}{2} B = 9,8919627 \\ + \log \sin a = 9,6001181 \\ + \log \sin c = 8,5017432 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Summe} = 37,8857867 \\ - \log \sin \frac{1}{2}(a - c) = 9,2736634 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Rest} = 28,6121233 \\ - \log \sin \frac{1}{2}(a - c) = 9,2736634 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2. \log \tan u = 19,3384599 \\ \log \tan u = 9,6692299 \\ u = 25^\circ 1' 41,436'' \\ 10 + \log \sin \frac{1}{2}(a - c) = 19,2736634 \\ - \log \cos u = 9,9571761 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log \sin \frac{1}{2} b = 9,3164873 \\ \frac{1}{2} b = 11^\circ 57' 39,749'' \\ 90^\circ - \beta = b = 23^\circ 55' 19,498'' \\ \beta = +66^\circ 4' 40,502'' \end{array}$$

Oder

$$a = 90^\circ - \delta = 1^\circ 49' 10''$$

$$c = \theta = 23. 28. 0.$$

$$a + c = 25. 17. 10.$$

$$\frac{1}{2}(a + c) = 12. 38. 35.$$

$$B = 90^\circ + \alpha = 102. 28. 40.$$

$$\frac{1}{2} B = 51. 14. 20.$$

$$b = 90^\circ - \beta$$

$$\log \text{Cosin } \frac{1}{2} B = 9,7966262$$

$$+ \log \text{Cosin } \frac{1}{2} B = 9,7966262$$

$$+ \log \text{Sin } a = 8,5017432$$

$$+ \log \text{Sin } c = 9,6001181$$

$$\text{Summe} = 37,6951137$$

$$- \log \text{Sin } \frac{1}{2}(a + c) = 9,3401993$$

$$\text{Rest} = 28,3549144$$

$$- \log \text{Sin } \frac{1}{2}(a + c) = 9,3401993$$

$$2. \log \text{Cosin } u = 19,0147151$$

$$\log \text{Cosin } u = 9,5073575$$

$$u = 71^\circ 14' 18,34''$$

$$\log \text{Sin } \frac{1}{2}(a + c) = 9,3401993$$

$$+ \log \text{Sin } u = 9,9762881$$

$$\log \text{Sin } \frac{1}{2} b = 9,3164874$$

$$\frac{1}{2} b = 11^\circ 57' 39,7585''$$

$$b = 23. 55. 19,5170$$

$$90. 0. 0.$$

$$\beta = 66^\circ 4' 40,483'' \text{Nö.}$$

Drey Beyspiele zur 4ten Methode λ und β zu finden.

$$1) \alpha = 12^\circ 28' 40''; \delta = +88^\circ 10' 50''; \theta = 23^\circ 28' 0''$$

$$90^\circ - \delta = 1^\circ 49' 10''$$

$$\frac{90^\circ + \alpha}{2} = 51. 14. 20.$$

$$\theta > 90^\circ - \delta$$

also

$$\theta - (90^\circ - \delta) = 21^\circ 38' 50''$$

$$\theta + (90^\circ - \delta) = 25. 17. 10.$$

und in der Gleichung für Tang λ
gebraucht man das *große* Segment.

$$\log \text{Cotang } \frac{1}{2} (90^\circ + \alpha) = 9,9046635$$

$$+ \log \text{Sin } (\theta \in (90^\circ - \delta)) = 9,5668977$$

$$\text{Summe} = 19,4715612$$

$$- \log \text{Sin } (\theta + (90^\circ - \delta)) = 9,6305689$$

$$\log \text{Tang } u = 9,8409923$$

$$u = 34^\circ 44' 16,666''$$

$$+ \frac{1}{2} (90^\circ + \alpha) = 51. 14. 20.$$

$$\text{großes Segment} = 85. 58. 36,666''$$

$$\log \text{Cosin } \theta = 9,9625076$$

$$+ \log \text{Tang} \left\{ \begin{array}{l} \text{großes Segment} \\ = 85^\circ 58' 36,67'' \end{array} \right\} = 11,1528422$$

$$\log \text{Tang } \lambda = 11,1153498$$

$$\lambda = 85^\circ 36' 55,66''$$

$$\log \text{Cosin } \alpha = 9,9896188$$

$$+ \log \text{Cosin } \delta = 8,5017432$$

$$\text{Summe} = 18,4913620$$

$$- \log \text{Cosin } \lambda = 8,8833774$$

$$\log \text{Cosin } \beta = 9,6079846$$

$$\beta = 66^\circ 4' 40''$$

$$2) \alpha = 139^\circ 18' 30''; \delta = -7^\circ 45' 0''; \theta = 23^\circ 28' 0''$$

$$90^\circ - \delta = 97^\circ 45' 0''$$

$$\frac{90^\circ + \alpha}{2} = 114. 39. 15.$$

$$\theta < 90^\circ - \delta$$

man gebraucht also in der Gleichung
für Tang λ das *kleine* Segment, und es ist

$$(90^\circ - \delta) - \theta = 74^\circ 17' 0''$$

$$(90^\circ - \delta) + \theta = 121. 13. 0.$$

$$\log \text{Cotang } \frac{1}{2} (90^\circ + \alpha) = 9,6617935$$

$$+ \log \text{Sin } (\theta \in (90^\circ - \delta)) = 9,9834517$$

$$\text{Summe} = 19,6452452$$

$$- \log \text{Sin } (\theta + (90^\circ - \delta)) = 9,9320746$$

$$\log - \text{Tang } u = 9,7131706$$

$$u = -27^\circ 19' 18'' \text{ *)}$$

$$\frac{1}{2} (90^\circ + \alpha) = 114. 39. 15.$$

$$\frac{1}{2} (90^\circ + \alpha) - u \} = 141. 58. 33.$$

Kleines Segment

$$\log \text{Cosin } \theta = 9,9625076$$

$$+ \log \text{Tang klein. Segments} = 9,8931874$$

$$\log - \text{Tang } 35^\circ 39' 5'' = 9,8556950$$

$$180. 0. 0.$$

$$\lambda = 144^\circ 20' 55''$$

$$\log \text{Cosin } \alpha = 9,8798005$$

$$\log \text{Cosin } \delta = 9,9960149$$

$$\text{Summe} = 19,8758154$$

$$\log \text{Cosin } \lambda = 9,9098652$$

$$\log \text{Cosin } \beta = 9,9659502$$

$$\beta = 22^\circ 23' 35''$$

$$\text{*) Oder } u = 152^\circ 40' 42''$$

$$\frac{1}{2} (90^\circ + \alpha) = 114. 39. 15.$$

$$\text{Klein. Segm.} = -38. 1. 27.$$

d. i. verneint $u < 90^\circ$.

$$3) \alpha = 359^{\circ} 22' 33''; \delta = +27^{\circ} 55' 37''; \theta = 23^{\circ} 28' 0''$$

$$90^{\circ} - \delta = 62^{\circ} 4' 23''$$

$$\frac{90^{\circ} + \alpha}{2} = 44. 41. 16,5.$$

$\theta < 90^{\circ} - \delta$ man gebraucht
daher das kleine Segment.

$$(90^{\circ} - \delta) - \theta = 38^{\circ} 36' 23''$$

$$(90^{\circ} - \delta) + \theta = 85. 32. 23.$$

$$\log \text{Cotang } \frac{1}{2} (90^{\circ} + \alpha) = 10,0047312$$

$$+ \log \text{Sin } (\theta \text{ od. } (90^{\circ} - \delta)) = 9,7951614$$

$$\text{Summe} = 19,7998926$$

$$- \log \text{Sin } (\theta + (90^{\circ} - \delta)) = 9,9986827$$

$$\log \text{Tang } u = 9,8012099$$

$$u = 32^{\circ} 19' 20,1''$$

$$\frac{1}{2} (90^{\circ} + \alpha) = 44. 41. 16,5.$$

$$\frac{1}{2} (90^{\circ} + \alpha) - u \text{ od. kl. Segm.} = 12. 21. 56,4.$$

$$\log \text{Cosin } \theta = 9,9625076$$

$$+ \log \text{Tang klein. Segm.} = 9,3409121$$

$$\log \text{Tang } \lambda = 9,3034197$$

$$\lambda = 11^{\circ} 22' 14,56''$$

$$\log \text{Cosin } \alpha = 9,9999742$$

$$\log \text{Cosin } \delta = 9,9462289$$

$$\text{Summe} = 19,9462031$$

$$\log \text{Cosin } \lambda = 9,9913910$$

$$\log \text{Cosin } \beta = 9,9548121$$

$$\beta = 25^{\circ} 41' 10,5''.$$

Vier Beyspiele zur 5ten Methode λ und β zu finden.

1) $\alpha = 12^\circ 28' 40''$; $\delta = 88^\circ 10' 50''$; $\theta = 23^\circ 28' 0''$
 Nördlich. Nördlich.

$$\begin{aligned} \log \sin \alpha &= 9,3345763 \\ + \log \cotang \delta &= 8,5019622 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cotang x &= 7,8365385 \\ x &= 89^\circ 36' 24'' \\ \theta &= 23. 28. 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - \theta = y &= 66. 8. 24. < 90^\circ \\ \theta &< x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cosin \alpha &= 9,9896189 \\ + \log \cosin \delta &= 8,5017432 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cosin z &= 8,4913621 \\ z &= 88^\circ 13' 25'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \tang z &= 11,5084454 \\ + \log \cosin y &= 9,6069220 \end{aligned}$$

$$\log \tang \lambda = 11,1153674$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 85^\circ 36' 56'' \\ &= 2Z. 25^\circ 36' 56'' \\ &= \Pi 25. 36. 56. \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{die gefuchte} \\ \text{Länge des} \\ \text{Sterns.} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \log \sin y &= 9,9612011 \\ + \log \sin z &= 9,9997912 \end{aligned}$$

$$\log \sin \beta = 9,9609923$$

$$\begin{aligned} \beta &= 66^\circ 4' 40'' \text{ Nördlich.} \\ &\text{die verlangte Breite} \\ &\text{des Sterns.} \end{aligned}$$

$$2) \alpha = 139^{\circ} 18' 30''; \delta = 7^{\circ} 45' 0''; \theta = 23^{\circ} 28' 0''$$

Nördlich. Südlich.

$$180^{\circ} - \alpha = 40^{\circ} 41' 30''$$

$$\log \sin 40^{\circ} 41' 30'' = 9,8142397$$

$$+ \log \cotang 7.45.0. = 10,8661609$$

$$\log \cotang x = 10,6804006$$

$$x = 11^{\circ} 47' 26''$$

$$\theta = 23.28.0.$$

$$x + \theta = y = 35.15.26. < 90^{\circ}$$

$$\log \cosin 40^{\circ} 41' 30'' = 9,8798005$$

$$+ \log \cosin 7.45.0. = 9,9960149$$

$$\log \cosin z = 9,8758154$$

$$z = 41^{\circ} 17' 48''$$

$$\log \tang z = 9,9437014$$

$$+ \log \cosin y = 9,9119928$$

$$\log \tang \lambda = 9,8556942$$

$$\lambda = 35^{\circ} 39' 5''$$

$$6Z = 180.0.0.$$

$$6Z - \lambda = 144.20.55. \text{ gesuchte}$$

$$= 4Z.24^{\circ} 20' 55'' \text{ Längedes}$$

$$= \Omega 24.20.55. \text{ Sterns.}$$

$$\log \sin y = 9,7613625$$

$$+ \log \sin z = 9,8195163$$

$$\log \sin \beta = 9,5808788$$

$$\beta = 22^{\circ} 23' 35'' \text{ Südlich.}$$

$$3) \alpha = 359^{\circ} 22' 33''; \delta = 27^{\circ} 55' 37''; \theta = 23^{\circ} 28' 0''$$

Südlich. Nördlich.

$$360^{\circ} - \alpha = 0^{\circ} 37' 27''$$

$$\log \sin 0^{\circ} 37' 27'' = 8,037,1693$$

$$+ \log \cotang 27. 55. 37. = 10,275 6627$$

$$\log \cotang x = 8,312 8320$$

$$x = 88^{\circ} 49' 22''$$

$$\theta = 23. 28. 0.$$

$$x + \theta = y = 112. 17. 22. > 90^{\circ}$$

$$180^{\circ} - y = 67. 42. 38.$$

$$\log \cos 0^{\circ} 37' 27'' = 9,999 9742$$

$$+ \log \cos 27. 55. 37. = 9,946 2289$$

$$\log \cos z = 9,946 2031$$

$$z = 27^{\circ} 56' 0''$$

$$\log \tan z = 9,724 4543$$

$$+ \log \cos 67^{\circ} 42' 38'' = 9,578 9665$$

$$\log \tan \lambda = 9,303 4208$$

$$\lambda = 11^{\circ} 22' 15'' \text{ die gesuchte}$$

$$= 0Z. 11^{\circ} 22' 15'' \text{ Länge.}$$

$$= \gamma 11. 22. 15.$$

$$\log \sin 67^{\circ} 42' 38'' = 9,966 2730$$

$$+ \log \sin z = 9,670 6576$$

$$\log \sin \beta = 9,636 9306$$

$$\beta = 25^{\circ} 41' 10'' \text{ Nördlich.}$$

4) $\alpha = 198^\circ 17' 0''$; $\delta = 9^\circ 58' 0''$; $\theta = 23^\circ 28' 0''$
 Südlich. Südlich.

$$\alpha - 180^\circ = 18^\circ 17' 0''$$

$$\log \sin 18^\circ 17' 0'' = 9,4965370$$

$$+ \log \cotang 9. 58. 0. = 10,7551611$$

$$\log \cotang x = 10,2516981$$

$$x = 29^\circ 15' 19''$$

$$\theta = 23. 28. 0.$$

$$x - \theta = y = 5. 47. 19. < 90^\circ$$

$$\theta < x$$

$$\log \cosin 18^\circ 17' 0'' = 9,9775026$$

$$+ \log \cosin 9. 58. 0. = 9,9933959$$

$$\log \cosin z = 9,9708985$$

$$z = 20^\circ 44' 30''$$

$$\log \tang z = 9,5782951$$

$$+ \log \cosin y = 9,9977798$$

$$\log \tang \lambda = 9,5760749$$

$$\lambda = 20^\circ 38' 41''$$

$$+ 6 Z = 180. 0. 0.$$

$$6 Z + \lambda = 200. 38. 41. \text{ die gefuchte}$$

$$= 6Z. 20^\circ 38' 41. \text{ Länge.}$$

$$= 20. 38. 41.$$

$$\log \sin y = 9,0037127$$

$$+ \log \sin z = 9,5491934$$

$$\log \sin \beta = 8,5529061$$

$$\beta = 2^\circ 2' 49'' \text{ Südlich.}$$

die gefuchte Breite.

Vier Beyspiele zur 6ten Methode λ und β zu finden.

$$1) \alpha = 12^{\circ} 28' 40''; \delta = +88^{\circ} 10' 50''; \theta = 23^{\circ} 28' 0''$$

$$\log \sin \alpha = 9,3345763$$

$$+ \log \cotang \delta = 8,5019622$$

$$\log \text{Tang } u = 7,8365385$$

$$u = 0^{\circ} 23' 36''$$

$$\theta = 23. 28. 0.$$

$$u + \theta = z = 23. 51. 36.$$

$$\log \cosin z = 9,9612011$$

$$+ \log \sin \delta = 9,9997810$$

$$\text{Summe} = 19,9609821$$

$$- \log \cosin u = 9,9999898$$

$$\log \sin \beta = 9,9609923$$

$$\beta = 66^{\circ} 4' 40'' \text{ Nördlich.}$$

$$\log \sin z = 9,6069220$$

$$+ \log \text{Tang } \alpha = 9,3449574$$

$$\text{Summe} = 18,9518794$$

$$- \log \sin u = 7,8366347$$

$$\log \cotang x = 11,1152447$$

$$x = 4^{\circ} 23' 8''$$

$$3 Z = 90. 0. 0.$$

$$3 Z - x = \lambda = 85. 36. 52.$$

$$= 2 Z. 25^{\circ} 36' 52''$$

$$= \Pi 25. 36. 52.$$

Oder

$$\log \text{Tang } \beta = 10,3530054$$

$$+ \log \text{Tang } z = 9,6457209$$

$$\log \cosin x = 9,9987263$$

$$x = 4^{\circ} 23' 9,5''$$

$$3 Z = 90. 0. 0.$$

$$3 Z - x = \lambda = 85. 36. 50,5.$$

$$= 2 Z. 25^{\circ} 36' 50,5''$$

$$= \Pi 25. 36. 50,5.$$

$$2) \alpha = 139^{\circ} 18' 30''; \delta = -7^{\circ} 45' 0''; \theta = 23^{\circ} 28' 0''$$

$$180^{\circ} - \alpha = 40^{\circ} 41' 30''$$

$$\log \sin 40^{\circ} 41' 30'' = 9,8142397$$

$$+ \log \cotang 7.45.0. = 10,8661609$$

$$\log \tan u = 10,6804006$$

$$u = -78^{\circ} 12' 34'' \text{ weil } \delta \text{ ver-}$$

$$\theta = 23.28.0. \text{ neint ist.}$$

$$u + \theta = z = -54.44.34.$$

$$\log \cos z = 9,7613625$$

$$+ \log \sin \delta = 9,1298539$$

$$\text{Summe} = 18,8912164$$

$$- \log \cos u = 9,3103421$$

$$\log \sin \beta = 9,5808743$$

$$\beta = 22^{\circ} 23' 34'' \text{ Südlich.}$$

$$= -22.23.34.$$

$$\log \sin z = 9,9119928$$

$$+ \log \tan 40^{\circ} 41' 30'' = 9,9344392$$

$$\text{Summe} = 19,8464320$$

$$- \log \sin u = 9,9907388$$

$$\log \cotang x = 9,8556932$$

$$x = 54^{\circ} 20' 55''$$

$$3Z = 90.0.0.$$

$$3Z + x = \lambda = 144.20.55.$$

$$= 4Z.24^{\circ} 20' 55''$$

$$= \Omega 24.20.55.$$

Oder:

$$\log \tan \beta = 9,6149212$$

$$+ \log \tan z = 10,1506303$$

$$\log \cos x = 9,7655515$$

$$x = 54^{\circ} 20' 57''$$

$$3Z = 90.0.0.$$

$$3Z + x = \lambda = 144.20.57.$$

$$= 4Z.24^{\circ} 20' 57''$$

$$= \Omega 24.20.57.$$

$$3) \alpha = 359^{\circ} 22' 33''; \delta = +27^{\circ} 55' 37''; \theta = 23^{\circ} 28' 0''$$

$$360^{\circ} - \alpha = 0^{\circ} 37' 27''$$

$$\log \sin 0^{\circ} 37' 27'' = 8,037 1693$$

$$+ \log \cotang 27. 55. 37. = 10,275 6627$$

$$\log \tan u = 8,312 8320$$

$$u = 1^{\circ} 10' 38''$$

$$\theta = 23. 28. 0.$$

$$\theta - u = z = 22. 17. 22.$$

$$\log \cosin z = 9,966 2730$$

$$+ \log \sin \delta = 9,670 5662$$

$$\text{Summe} = 19,636 8392$$

$$- \log \cosin u = 9,999 9083$$

$$\log \sin \beta = 9,636 9309$$

$$\beta = 25^{\circ} 41' 10'' \text{ Nö.}$$

$$\log \sin z = 9,578 9665$$

$$+ \log \tan 0^{\circ} 37' 27'' = 8,037 1951$$

$$\text{Summe} = 17,616 1616$$

$$- \log \sin u = 8,312 7053$$

$$\log \cotang x = 9,303 4563$$

$$x = 78^{\circ} 37' 42''$$

$$3Z = 90. 0. 0.$$

$$3Z - x = \lambda = 11. 22. 18.$$

$$= 0Z. 11. 22. 18.$$

$$= \gamma 11. 22. 18.$$

Oder

$$\log \tan \beta = 9,682 1171$$

$$+ \log \tan z = 9,612 6935$$

$$\log \cosin x = 9,294 8106$$

$$x = 78^{\circ} 37' 45''$$

$$3Z = 90. 0. 0.$$

$$3Z - x = \lambda = 11. 22. 15.$$

$$= 0Z. 11. 22. 15.$$

$$= \gamma 11. 22. 15.$$

$$4) \alpha = 198^\circ 17' 0''; \delta = -9^\circ 58' 0''; \theta = 23^\circ 28' 0''$$

$$\alpha - 180^\circ = 18^\circ 17' 0''$$

$$\log \sin 18^\circ 17' 0'' = 9,496\,5370$$

$$+ \log \cotang 9. 58. 0. = 10,755\,1611$$

$$\log \tan u = 10,251\,6981$$

$$u = 119^\circ 15' 19''$$

$$\theta = 23. 28. 0.$$

$$u - \theta = z = 95. 47. 19.$$

$$\log \cos z = 9,003\,7127$$

$$+ \log \sin \delta = 9,238\,2349$$

$$\text{Summe} = 18,241\,9476$$

$$- \log \cos u = 9,689\,0438$$

$$\log \sin \beta = 8,552\,9038$$

$$\beta = -2^\circ 2' 49''$$

$$\log \sin z = 9,997\,7798$$

$$+ \log \tan 18^\circ 17' 0'' = 9,519\,0344$$

$$\text{Summe} = 19,516\,8142$$

$$- \log \sin u = 9,940\,7410$$

$$\log \cotang x = 9,576\,0732$$

$$x = 180^\circ - 69^\circ 21' 19'' \text{ weil}$$

$$= 110^\circ 38' 41'' \quad u > \theta$$

$$3Z = 90. 0. 0.$$

$$3Z + x = \lambda = 200. 38. 41.$$

$$= 6Z. 20. 38. 41.$$

$$= \hat{=} 20. 38. 41.$$

Oder

$$\begin{aligned}
 \log \text{Tang } \beta &= 8,553\,1682 \\
 + \log \text{Tang } z &= 10,994\,0671 \\
 \hline
 \log \text{Cosin } x &= 9,547\,2353 \\
 x &= 180^\circ - 69^\circ 21' 22'' \\
 &= 110^\circ 38' 38'' \\
 3 Z &= 90. \quad 0. \quad 0. \\
 \hline
 3 Z + x = \lambda &= 200. \quad 38. \quad 38. \\
 &= 6Z. 20^\circ 38' 38'' \\
 &= \hat{=} 20. \quad 38. \quad 38.
 \end{aligned}$$

Vier Beyspiele zur 7ten Methode λ und β zu finden.

$$1) \alpha = 12^\circ 28' 40''; \delta = +88^\circ 10' 50''; \theta = 23^\circ 28' 0''$$

$$\theta + \delta = 111^\circ 38' 50''$$

$$\frac{1}{2}(\theta + \delta) = 55. 49. 25.$$

$$45^\circ = 45. 0. 0.$$

$$\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ = 10. 49. 25.$$

$$\theta - \delta = -64. 42. 50.$$

$$\frac{1}{2}(\theta - \delta) = -32. 21. 25.$$

$$45^\circ = 45. 0. 0.$$

$$\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ = 12. 38. 35.$$

$$\frac{1}{2}\alpha = 6. 14. 20.$$

$$45^\circ = 44. 59. 60.$$

$$45^\circ - \frac{1}{2}\alpha = 38. 45. 40.$$

$$\log \text{Cosin} [\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ] = 9,992\,2043$$

$$+ \log \text{Tang} (45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = 9,904\,6635$$

$$\text{Summe} = 19,896\,8678$$

$$- \log \text{Cosin} [\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ] = 9,989\,3397$$

$$\log \text{Tang} \frac{1}{2} [x + (90^\circ - \lambda)] = 9,907\,5281$$

$$\frac{1}{2} [x + (90^\circ - \lambda)] = 38^\circ 56' 45''$$

$$\log \text{Sin} [\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ] = 9,273\,6634$$

$$+ \log \text{Tang} (45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = 9,904\,6635$$

$$\text{Summe} = 19,178\,3269$$

$$- \log \text{Sin} [\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ] = 9,340\,1992$$

$$\log \text{Tang} \frac{1}{2} [x - (90^\circ - \lambda)] = 9,838\,1277$$

$$\frac{1}{2} [x - (90^\circ - \lambda)] = 34^\circ 33' 40''$$

$$\frac{1}{2} [x + (90^\circ - \lambda)] = 38. 56. 45.$$

$$90^\circ - \lambda = 4. 23. 5.$$

$$\lambda = 85. 36. 55.$$

$$\log \text{Cosin} \alpha = 9,989\,6188$$

$$+ \log \text{Cosin} \delta = 8,501\,7432$$

$$\text{Summe} = 18,491\,3620$$

$$- \log \text{Cosin} \lambda = 8,883\,3955$$

$$\log \text{Cosin} \beta = 9,607\,9665$$

$$\beta = 66^\circ 4' 44''$$

$$2) \alpha = 139^\circ 18' 30''; \delta = -7^\circ 45' 0''; \theta = 23^\circ 28' 0''$$

$\theta + \delta =$	$15^\circ 43' 0''$
$\frac{1}{2}(\theta + \delta) =$	$7. 51. 30.$
$45^\circ =$	$45. 0. 0.$
$\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ =$	$- 37. 8. 30.$
$\theta - \delta =$	$31. 13. 0.$
$\frac{1}{2}(\theta - \delta) =$	$15. 36. 30.$
$45^\circ =$	$45. 0. 0.$
$\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ =$	$60. 36. 30.$
$\frac{1}{2}\alpha =$	$69. 39. 15.$
$45^\circ =$	$45. 0. 0.$
$45^\circ - \frac{1}{2}\alpha =$	$- 24. 39. 15.$
$\log \text{Cosin} [\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ] =$	$9,901\,5374$
$+ \log \text{Tang} (45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) =$	$9,661\,7936$
Summe =	$19,563\,3310$
$- \log \text{Cosin} [\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ] =$	$9,690\,8842$
$\log \text{Tang} \frac{1}{2}[x + (90^\circ - \lambda)] =$	$9,872\,4468$
$\frac{1}{2}[x + (90^\circ - \lambda)] =$	$- 36^\circ 42' 16''$
$\log \text{Sin} [\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ] =$	$9,780\,8844$
$+ \log \text{Tang} (45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) =$	$9,661\,7936$
Summe =	$19,442\,6780$
$- \log \text{Sin} [\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ] =$	$9,940\,1603$
$\log \text{Tang} \frac{1}{2}[x - (90^\circ - \lambda)] =$	$9,502\,5177$
$\frac{1}{2}[x - (90^\circ - \lambda)] =$	$17^\circ 38' 39''$
$\frac{1}{2}[x + (90^\circ - \lambda)] =$	$- 36. 42. 16.$
$90^\circ - \lambda =$	$- 54. 20. 55.$
$\lambda =$	$144. 20. 55.$
$\log \text{Cosin} \alpha =$	$9,879\,8005$
$+ \log \text{Cosin} \delta =$	$9,996\,0149$
Summe =	$19,875\,8154$
$- \log \text{Cosin} \lambda =$	$9,909\,8652$
$\log \text{Cosin} \beta =$	$9,965\,9502$
$\beta =$	$22^\circ 23' 35''$

$$3) \alpha = 359^{\circ} 22' 33''; \delta = +27^{\circ} 55' 37''; \theta = 23^{\circ} 28' 0''$$

$$\begin{aligned} \theta + \delta &= 51^{\circ} 23' 37'' \\ \frac{1}{2}(\theta + \delta) &= 25. 41. 48,5. \\ 45^{\circ} &= 45. 0. 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^{\circ} &= -19. 18. 12. \\ \theta - \delta &= -4. 27. 37. \\ \frac{1}{2}(\theta - \delta) &= -2. 13. 48,5. \\ 45^{\circ} &= 45. 0. 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^{\circ} &= 42. 46. 12. \\ \frac{1}{2}\alpha &= 179. 41. 16,5. \\ 45^{\circ} &= 45. 0. 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha - 45^{\circ} &= 134. 41. 16. \\ \log \text{Cosin} [\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^{\circ}] &= 9,974 8716 \\ + \log \text{Tang} (\frac{1}{2}\alpha - 45^{\circ}) &= 10,004 7333 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Summe} &= 19,979 6049 \\ - \log \text{Cosin} [\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^{\circ}] &= 9,865 7467 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \text{Tang} \frac{1}{2}[x + (\lambda - 90^{\circ})] &= 10,113 8582 \\ \frac{1}{2}[x + (\lambda - 90^{\circ})] &= -52^{\circ} 25' 34'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \text{Sin} [\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^{\circ}] &= 9,519 2625 \\ + \log \text{Tang} (\frac{1}{2}\alpha - 45^{\circ}) &= 10,004 7333 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Summe} &= 19,523 9958 \\ - \log \text{Sin} [\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^{\circ}] &= 9,831 9063 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \text{Tang} \frac{1}{2}[x - (\lambda - 90^{\circ})] &= 9,692 0895 \\ \frac{1}{2}[x - (\lambda - 90^{\circ})] &= 26^{\circ} 12' 13'' \\ \frac{1}{2}[x + (\lambda - 90^{\circ})] &= -52. 25. 34. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda - 90^{\circ} &= -78. 37. 47. \\ \lambda &= 11. 22. 13. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \text{Cosin} \alpha &= 9,999 9742 \\ + \log \text{Cosin} \delta &= 9,946 2289 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Summe} &= 19,946 2031 \\ - \log \text{Cosin} \lambda &= 9,991 3916 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \text{Cosin} \beta &= 9,954 8115 \\ \beta &= 25^{\circ} 41' 11'' \end{aligned}$$

$$4) \alpha = 198^{\circ} 17' 0''; \delta = -9^{\circ} 58' 0''; \theta = 23^{\circ} 28' 0''$$

$\theta + \delta =$	13° 30' 0''
$\frac{1}{2}(\theta + \delta) =$	6. 45. 0.
$45^{\circ} =$	45. 0. 0.
$\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^{\circ} =$	38. 15. 0.
$\theta - \delta =$	33. 26. 0.
$\frac{1}{2}(\theta - \delta) =$	16. 43. 0.
$45^{\circ} =$	45. 0. 0.
$\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^{\circ} =$	61. 43. 0.
$\frac{1}{2}\alpha =$	99. 8. 30.
$45^{\circ} =$	45. 0. 0.
$\frac{1}{2}\alpha - 45^{\circ} =$	54. 8. 30.
$\log \text{Cosin} [\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^{\circ}] =$	9,895 0450
$+ \log \text{Tang} (\frac{1}{2}\alpha - 45^{\circ}) =$	10,140 9989
$\text{Summe} =$	20,036 0439
$- \log \text{Cosin} [\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^{\circ}] =$	9,675 6245
$\log \text{Tang} \frac{1}{2}[x + (\lambda - 90^{\circ})] =$	10,360 4194
$\frac{1}{2}[x + (\lambda - 90^{\circ})] =$	66° 26' 18''

$\log \sin [\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ]$	$=$	9,791 7566
$+ \log \tan (\frac{1}{2}\alpha - 45^\circ)$	$=$	10,140 9989
Summe	$=$	19,932 7555
$- \log \sin [\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ]$	$=$	9,944 7862
$\log \tan \frac{1}{2}[x - (\lambda - 90^\circ)]$	$=$	9,987 9693
$\frac{1}{2}[x - (\lambda - 90^\circ)]$	$=$	$- 44^\circ 12' 23''$
$\frac{1}{2}[x + (\lambda - 90^\circ)]$	$=$	66. 26. 18.
$\lambda - 90^\circ$	$=$	110. 38. 41.
λ	$=$	200. 38. 41.
$\log \cos \alpha$	$=$	9,977 5026
$+ \log \cos \delta$	$=$	9,993 3959
Summe	$=$	19,970 8985
$- \log \cos \lambda$	$=$	9,971 1759
$\log \cos \beta$	$=$	9,999 7226
β	$=$	$2^\circ 2' 51''$ oder $52''$

Zwey Beyspiele zur 8ten Methode λ und β zu finden.

$$1) \alpha = 12^\circ 28' 40''; \delta = +88^\circ 10' 50''; \theta = 23^\circ 28' 0''$$

$$\delta - \theta = 64^\circ 42' 50''$$

$$\sin(\delta - \theta) = +0,9041861$$

$$\sin \alpha = +0,216061$$

$$1 = 1,000000$$

$$1 - \sin \alpha = +0,783939$$

$$\log(1 - \sin \alpha) = 9,8942823 - 10$$

$$+ \log \sin \theta = 9,6001181 - 10$$

$$+ \log \cos \delta = 8,5017432 - 10$$

$$\text{Summe} = 7,9961436 - 10$$

$$= \log[(1 - \sin \alpha) \cdot \sin \theta \cdot \cos \delta]$$

$$(1 - \sin \alpha) \cdot \sin \theta \cdot \cos \delta = 0,0099116$$

$$+ \sin(\delta - \theta) = 0,9041861$$

$$\sin \beta = 0,9140977$$

$$\beta = +66^\circ 4' 40''$$

$$\log \cos \alpha = 9,9896188$$

$$\log \cos \delta = 8,5017432$$

$$\text{Summe} = 18,4913620$$

$$\log \cos \beta = 9,6079867$$

$$\log \cos \lambda = 8,8833753$$

$$\lambda = 85^\circ 36' 55,73''$$

$$2) \alpha = 198^{\circ} 17' 0''; \delta = -9^{\circ} 58' 0''; \theta = 23^{\circ} 28' 0''$$

$$\delta + \theta = 13^{\circ} 30' 0''$$

$$\sin(\delta + \theta) = 0,2334454$$

$$\sin \alpha = -0,3137163$$

$$1 = 1,0000000$$

$$1 + \sin \alpha = 0,6862837$$

$$\log(1 + \sin \alpha) = 9,8365039 - 10$$

$$+ \log \sin \theta = 9,6001181 - 10$$

$$+ \log \cos \delta = 9,9933959 - 10$$

$$\text{Summe} = 9,4300179 - 10$$

$$= \log[(1 + \sin \alpha) \cdot \sin \theta \cdot \cos \delta]$$

$$(1 + \sin \alpha) \cdot \sin \theta \cdot \cos \delta = 0,269165$$

$$\sin(\delta + \theta) = 0,233445$$

$$\sin \beta = -0,035720$$

$$\beta = -2^{\circ} 2' 49''$$

$$\log \cos \alpha = 9,9775026$$

$$+ \log \cos \delta = 9,9933959$$

$$\text{Summe} = 19,9708985$$

$$- \log \cos \beta = 9,9997228$$

$$\log - \cos 20^{\circ} 30' 41'' = 9,9711757$$

$$\lambda = 180^{\circ} + 20^{\circ} 38' 41''$$

$$= 200. 38. 41.$$

Drey Beyspiele zur 5ten Methode α und δ zu finden.

1) $\lambda = 110^\circ 33' 46''$; $\beta = 4^\circ 31' 15''$; $\theta = 23^\circ 27' 54''$
Südlich.

$$180^\circ - \lambda = 69^\circ 26' 14''$$

$$\begin{aligned} \text{Log Sin } 69^\circ 26' 14'' &= 9,971\,4094 \\ + \text{log Cotang } 4. 31. 15. &= 11,102\,0016 \end{aligned}$$

$$\text{log Cotang } x = 11,073\,4110$$

$$x = 4^\circ 49' 37''$$

$$\theta = 23. 27. 54. > x$$

$$\theta - x = y = 18. 38. 17. < 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Log Cosin } 69^\circ 26' 14'' &= 9,545\,5959 \\ + \text{log Cosin } 4. 31. 15. &= 9,998\,6467 \end{aligned}$$

$$\text{log Cosin } z = 9,544\,2426$$

$$z = 69^\circ 30' 15''$$

$$\text{log Tang } z = 10,427\,3586$$

$$+ \text{log Cosin } y = 9,976\,6050$$

$$\text{log Tang } \alpha = 10,403\,9636$$

$$\alpha = 68^\circ 28' 16''$$

$$180^\circ = 180. 0. 0.$$

$$180^\circ - \alpha = 111. 31. 44. \text{ die gesuchte}$$

$$\text{log Sin } y = 9,504\,5915 \text{ gerade Auf.}$$

$$+ \text{log Sin } z = 9,971\,5994 \text{ steigung.}$$

$$\text{log Sin } \delta = 9,476\,1909$$

$$\delta = 17^\circ 25' 9'' \text{ Nördlich.}$$

2) $\lambda = 151^\circ 0' 0''$; $\beta = 1^\circ 3' 0''$; $\theta = 23^\circ 27' 54''$
Nördlich.

$$180^\circ - \lambda = 29^\circ 0' 0''$$

$$\begin{aligned} \text{Log Sin } 29^\circ 0' 0'' &= 9,685\,5712 \\ + \text{log Cotang } 1. 3. 0. &= 11,736\,8847 \end{aligned}$$

$$\text{log Cotang } x = 11,422\,4559$$

$$x = 2^\circ 9' 54''$$

$$\theta = 23. 27. 54.$$

$$x + \theta = y = 25. 37. 48. < 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Log Cosin } 29^\circ 0' 0'' &= 9,941\,8193 \\ + \text{log Cosin } 1. 3. 0. &= 9,999\,9271 \end{aligned}$$

$$\text{log Cosin } z = 9,941\,7464$$

$$z = 29^\circ 1' 2''$$

$$\text{log Tang } z = 9,744\,0598$$

$$+ \text{log Cosin } y = 9,955\,0169$$

$$\text{log Tang } \alpha = 9,699\,0767$$

$$\alpha = 26^\circ 34' 14''$$

$$180^\circ = 179. 59. 60.$$

$$180^\circ - \alpha = 153. 25. 46. \text{ die gefuchte Rectafcension.}$$

$$\text{log Sin } y = 9,636\,0442$$

$$+ \text{log Sin } z = 9,685\,8066$$

$$\text{log Sin } \delta = 9,321\,8508$$

$$\delta = 12^\circ 6' 43'' \text{ Nördlich.}$$

$$3) \lambda = 6Z. 20^{\circ} 21' 18''; \beta = 2^{\circ} 2' 5''; \theta = 23^{\circ} 28' 20''$$

Südlich.

$$\lambda - 6Z = 20^{\circ} 21' 18''$$

$$\begin{aligned} \text{Log Sin } 20^{\circ} 21' 18'' &= 9,541\,3743 \\ + \log \text{Cotang } 2. \quad 2. \quad 5. &= 11,449\,4349 \end{aligned}$$

$$\log \text{Cotang } x = 10,990\,8092$$

$$x = 5^{\circ} 49' 55''$$

$$\theta = 23. \quad 28. \quad 20.$$

$$x + \theta = y = 29. \quad 18. \quad 15. < 90^{\circ}$$

$$\begin{aligned} \log \text{Cosin } 20^{\circ} 21' 18'' &= 9,971\,9970 \\ + \log \text{Cosin } 2. \quad 2. \quad 5. &= 9,999\,7261 \end{aligned}$$

$$\log \text{Cosin } z = 9,971\,7231$$

$$z = 20^{\circ} 27' 8''$$

$$\begin{aligned} \log \text{Tang } z &= 9,571\,6326 \\ + \log \text{Cosin } y &= 9,940\,5333 \end{aligned}$$

$$\log \text{Tang } \alpha = 9,512\,1659$$

$$\alpha = 18^{\circ} 0' 54''$$

$$180^{\circ} = 180. \quad 0. \quad 0.$$

$$180^{\circ} + \alpha = 198. \quad 0. \quad 54. \quad \text{Rectascen-}$$

$$\log \text{Sin } y = 9,689\,7047 \quad \text{tion.}$$

$$+ \log \text{Sin } z = 9,543\,3555$$

$$\log \text{Sin } \delta = 9,233\,0602$$

$$\delta = 9^{\circ} 50' 51''$$

Südliche
Declination.

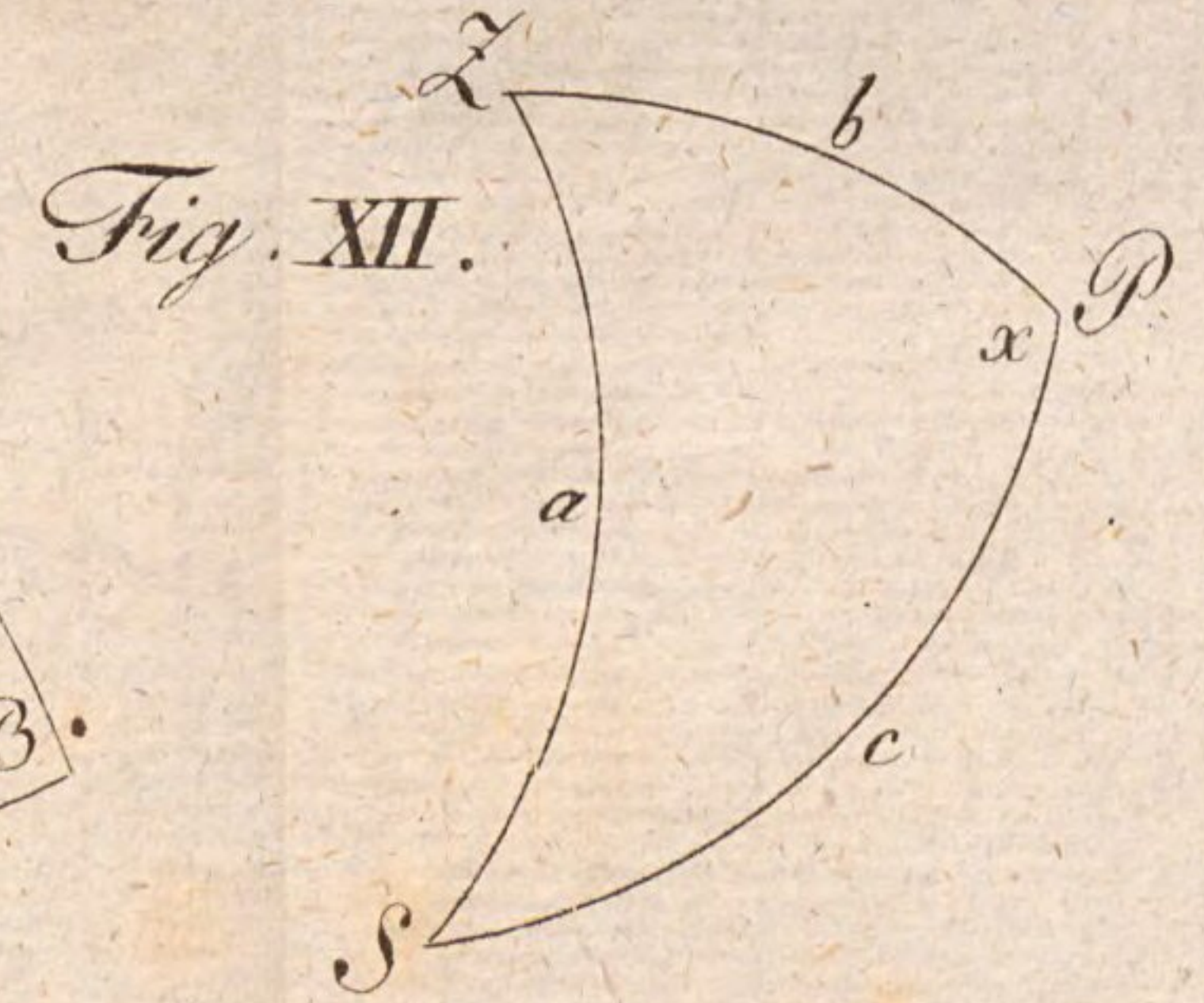
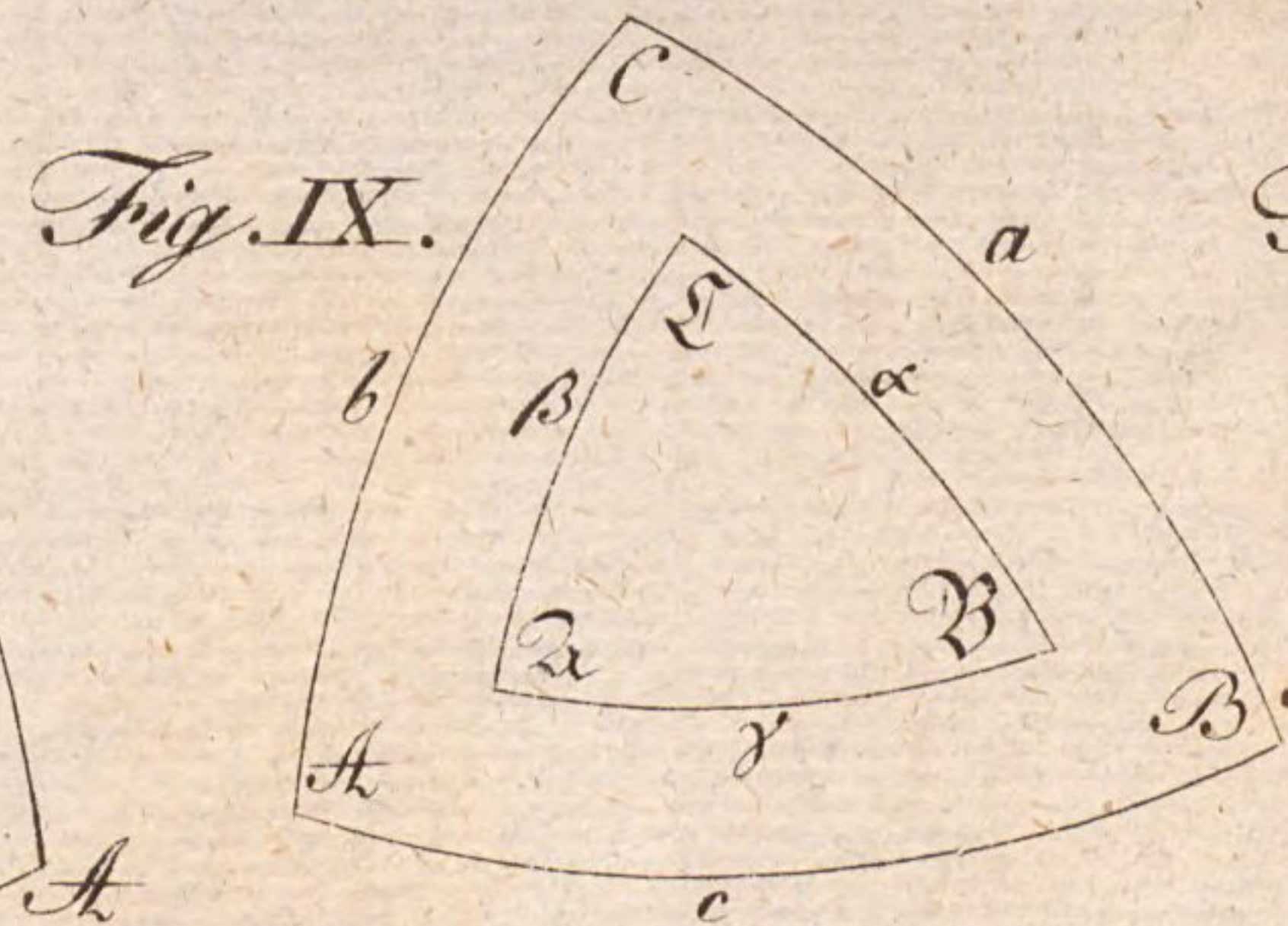
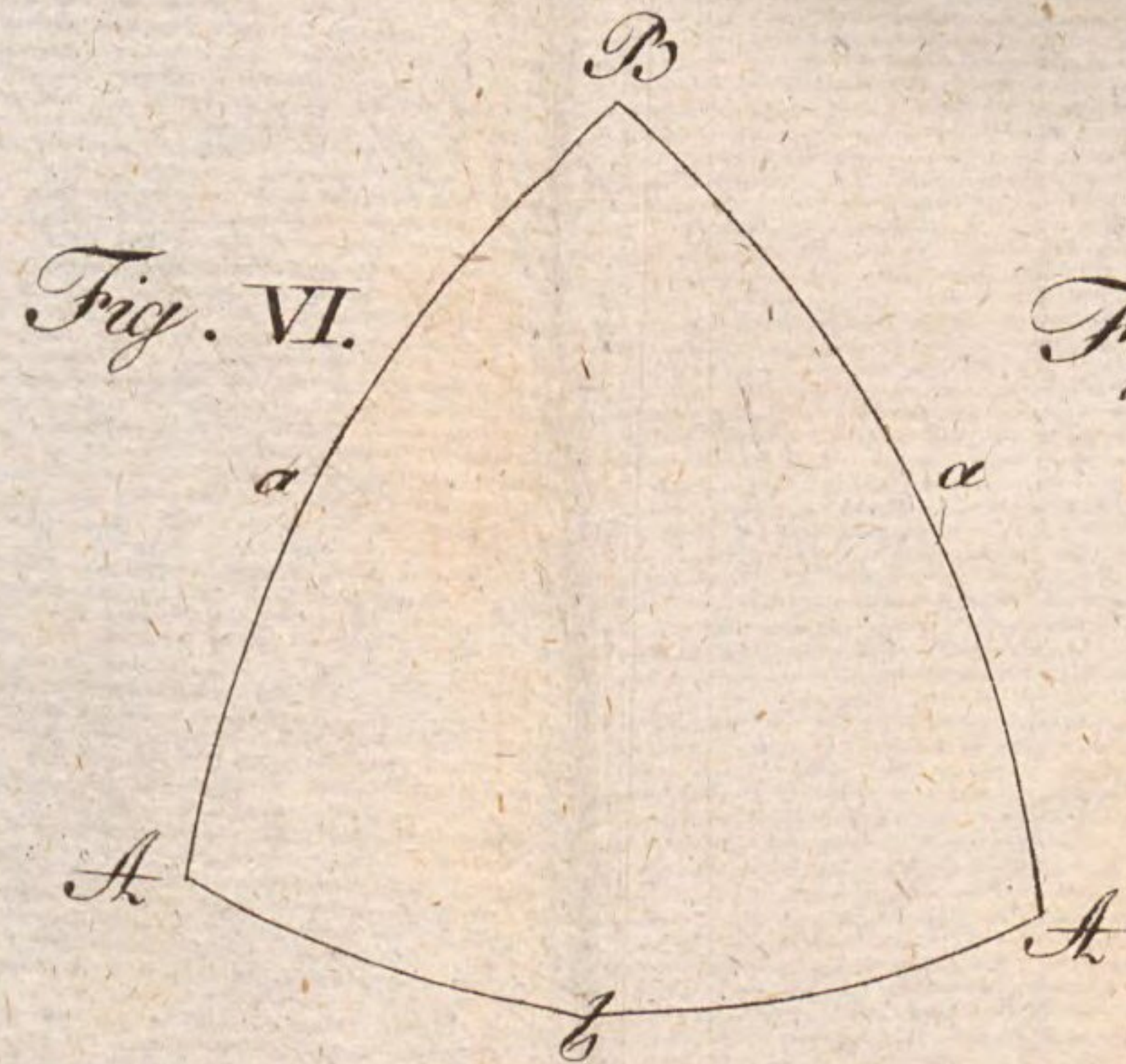
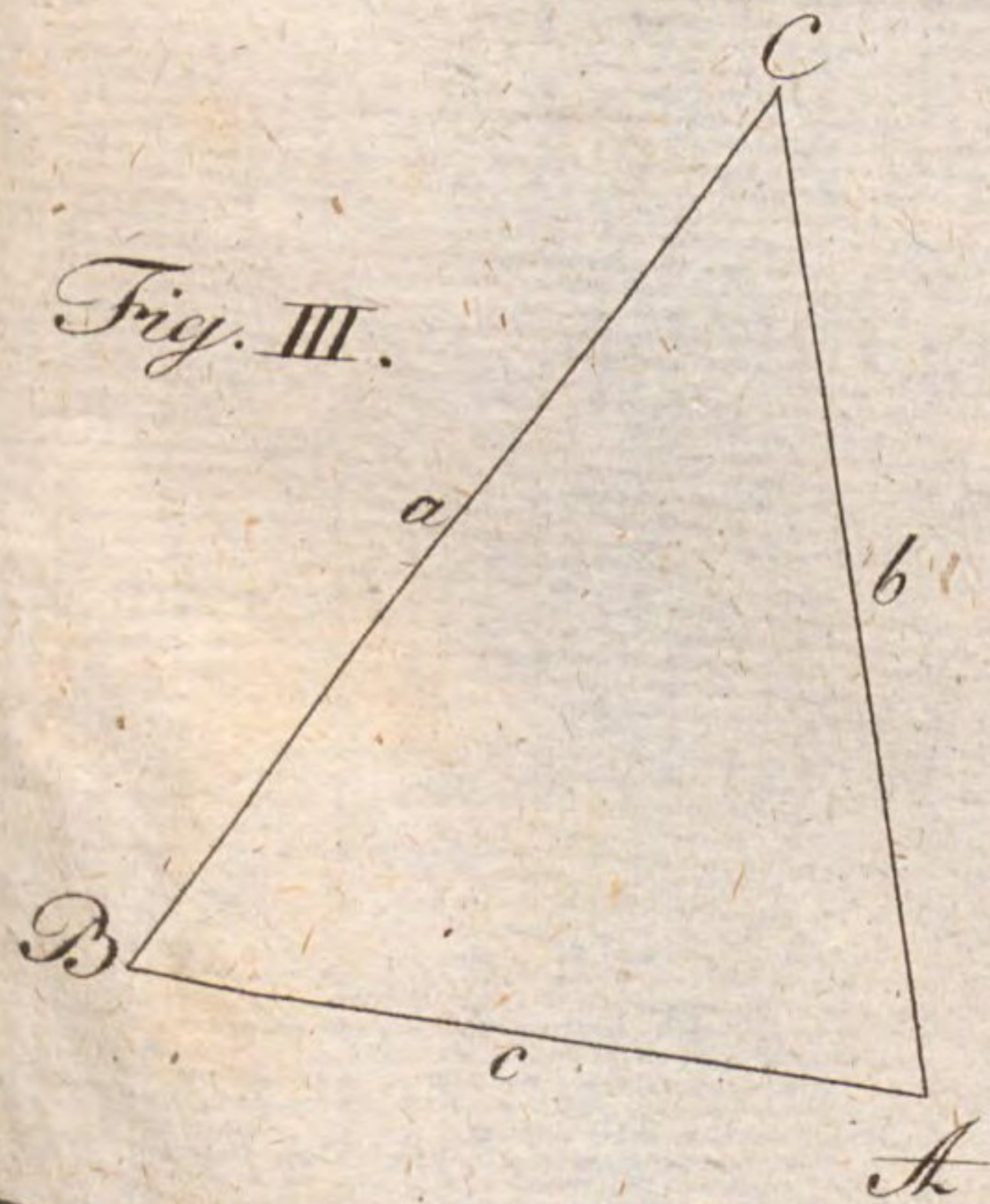
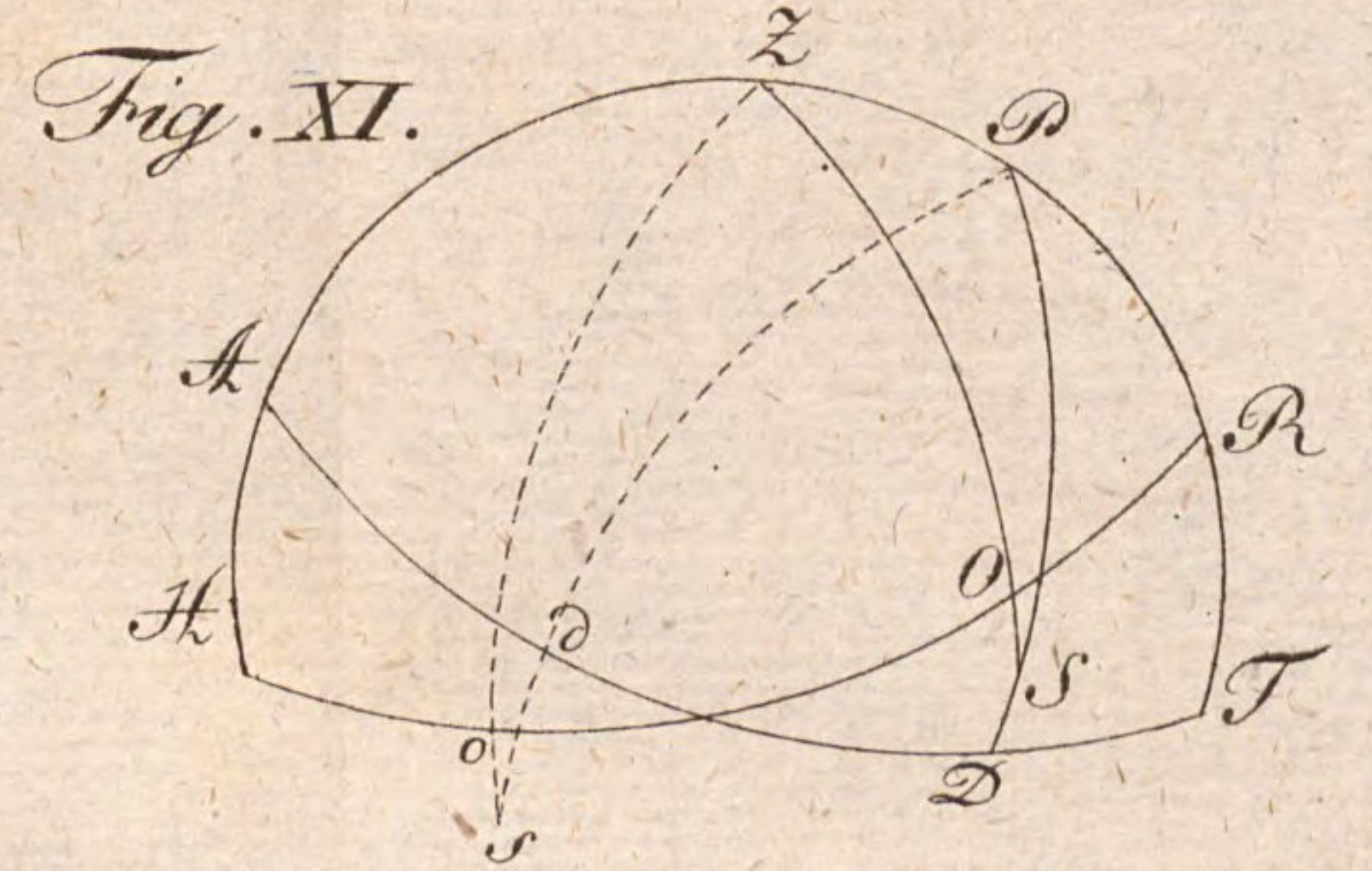
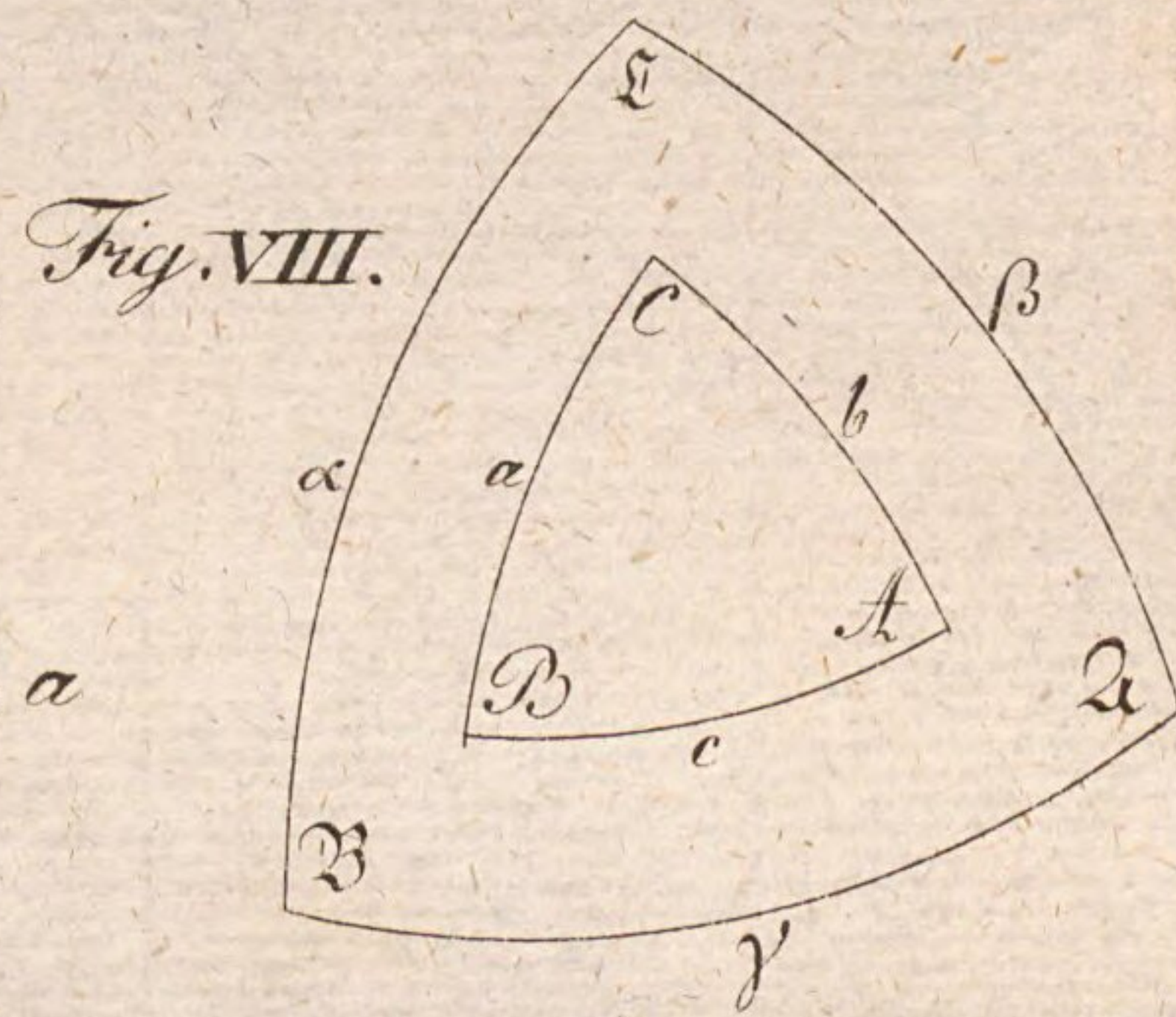
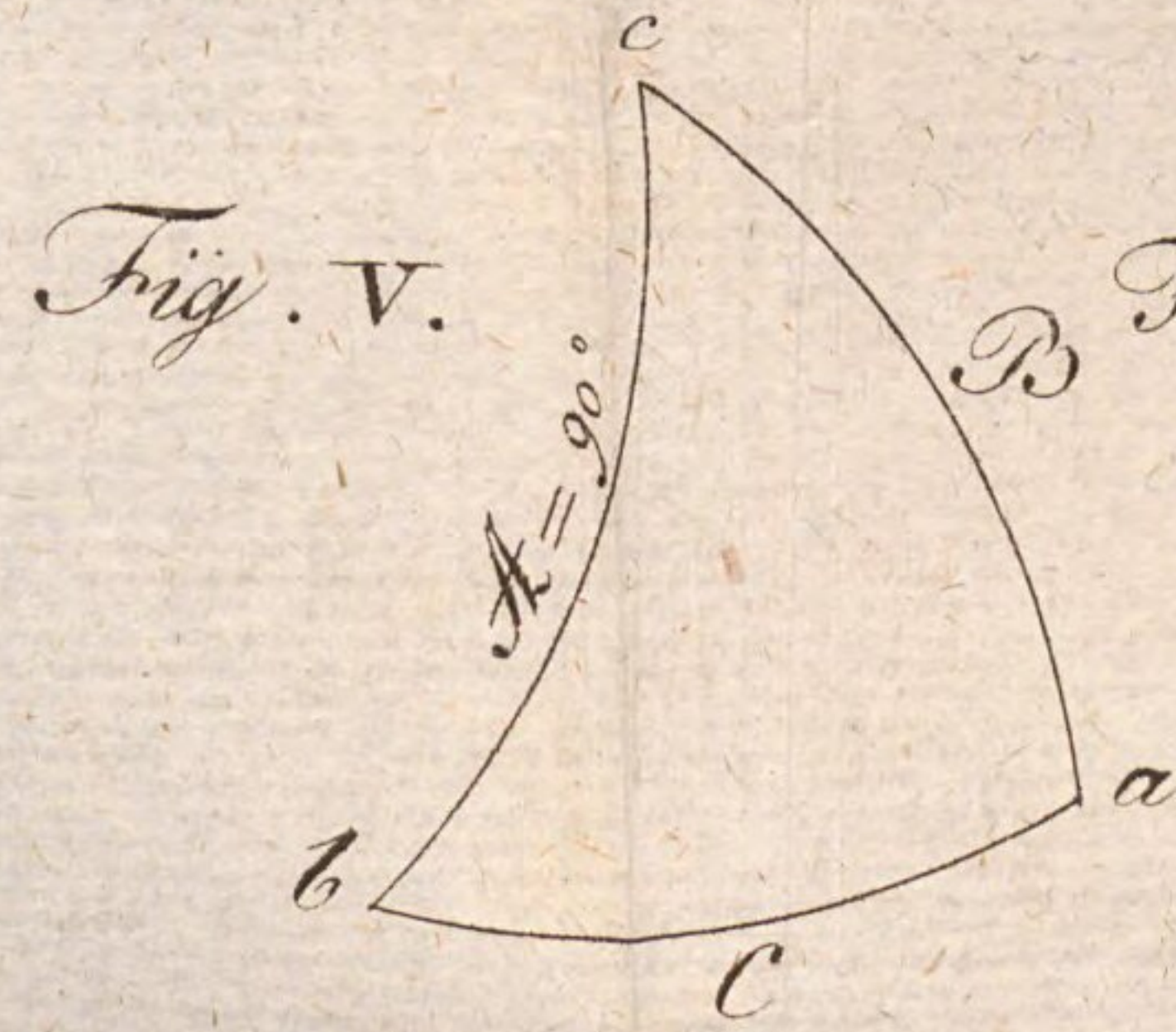
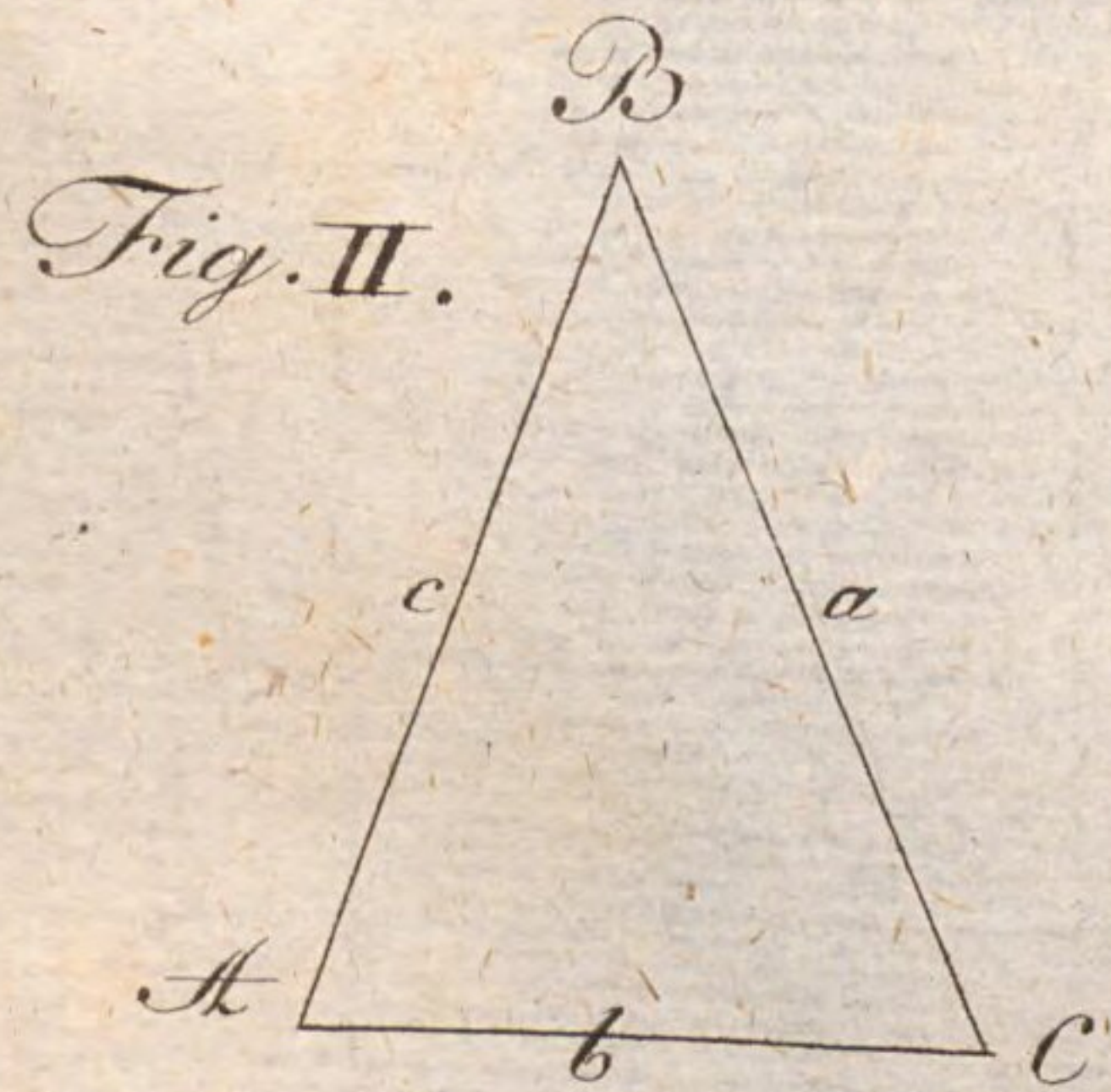
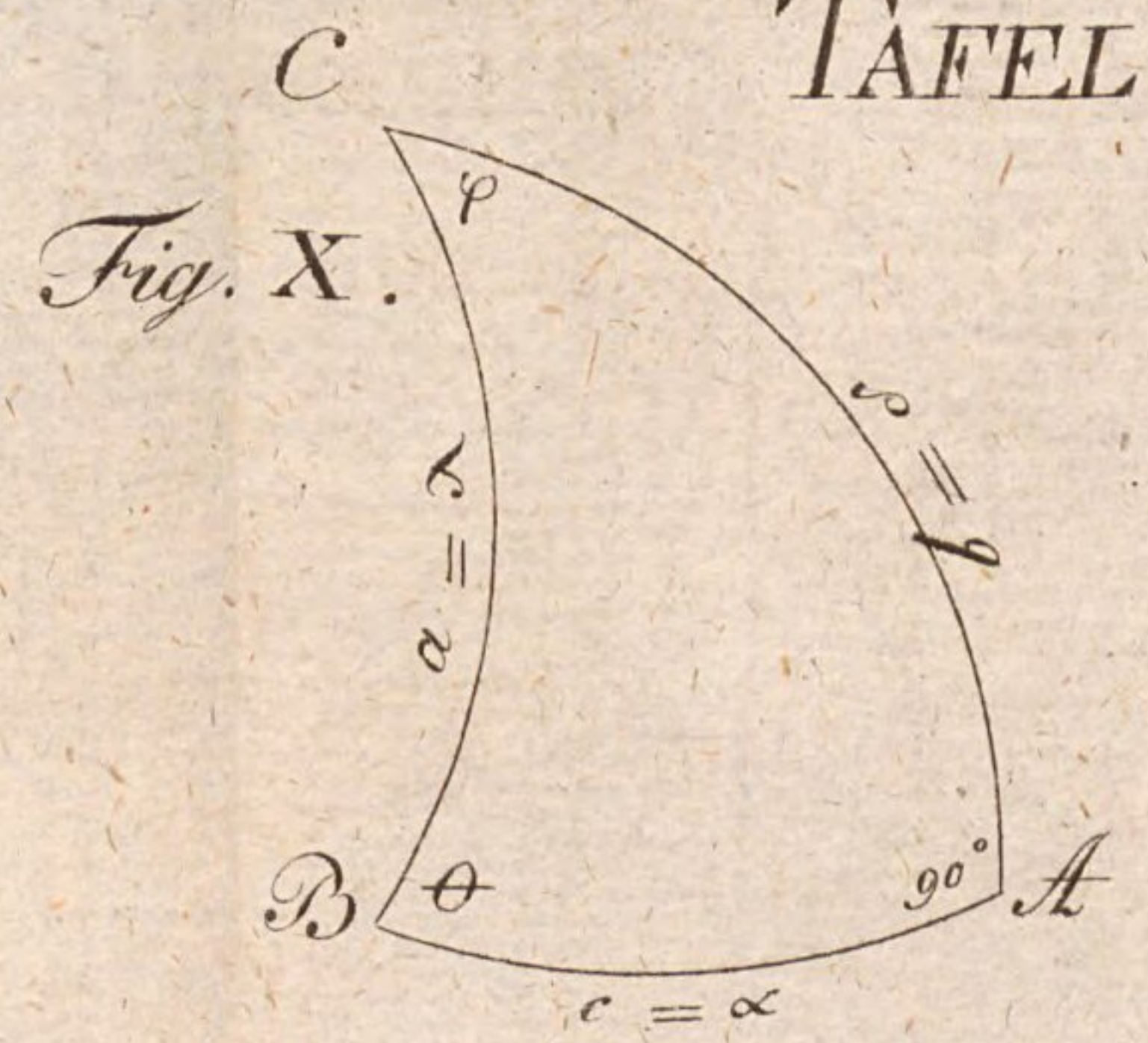
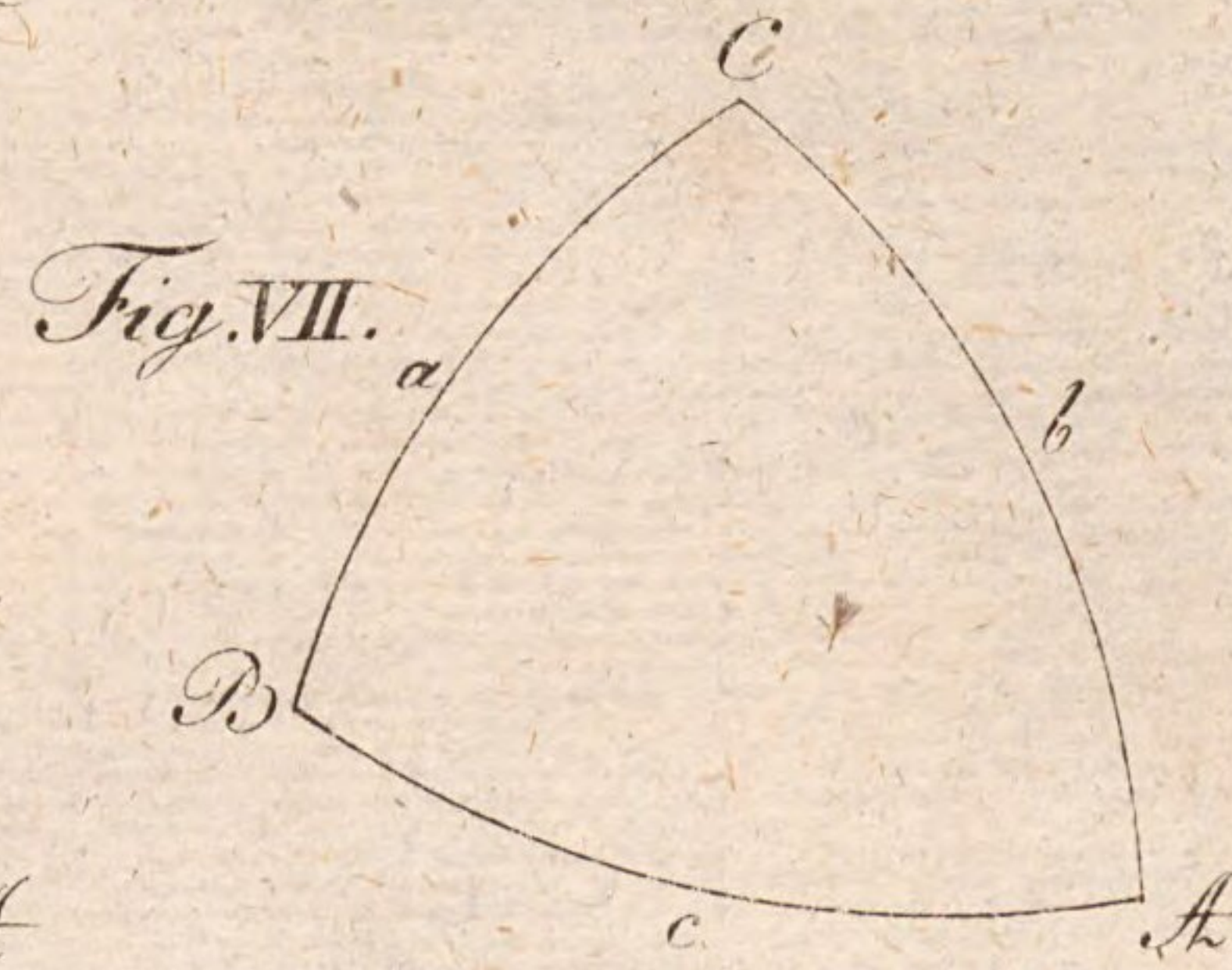
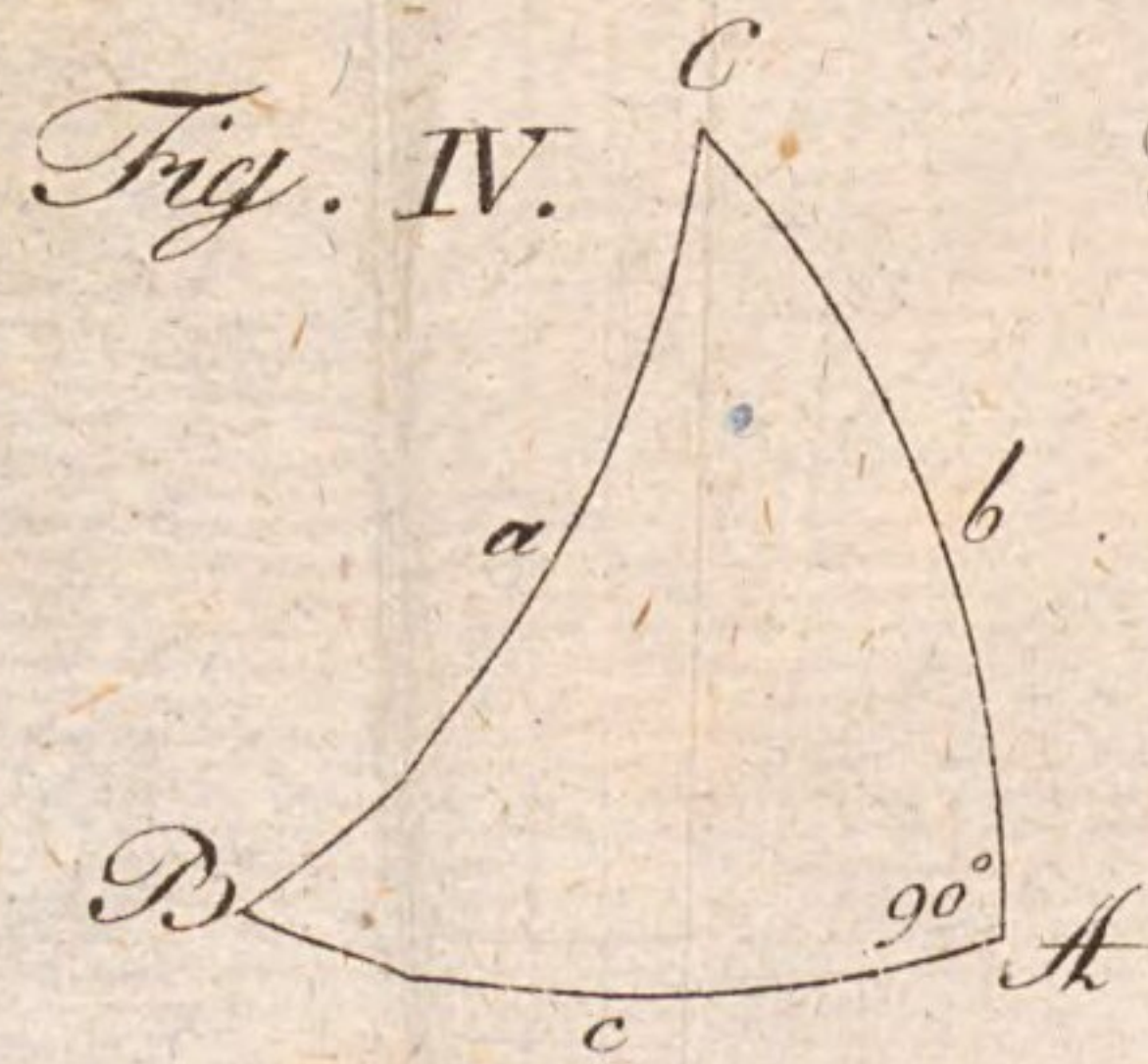
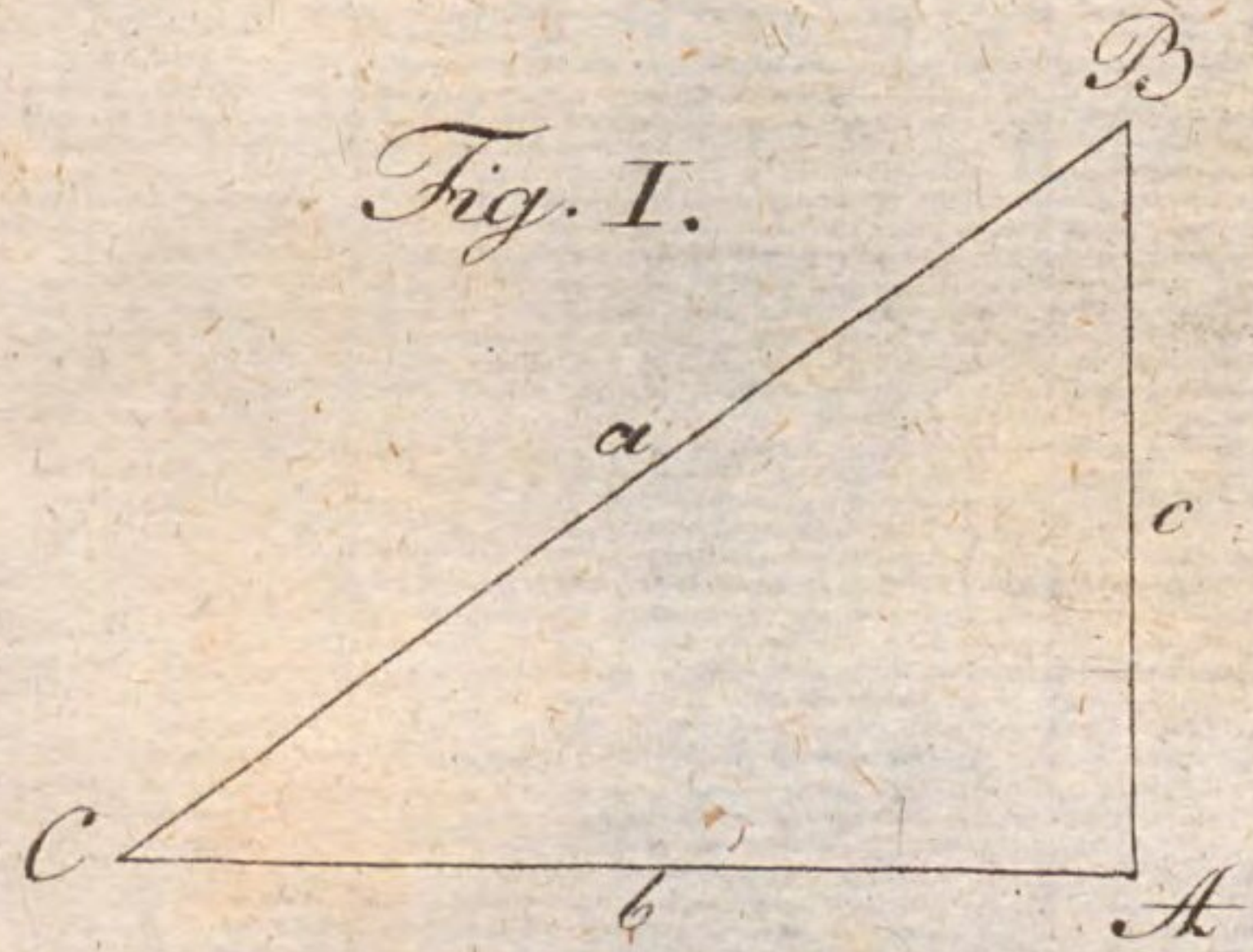


Fig. XIII.

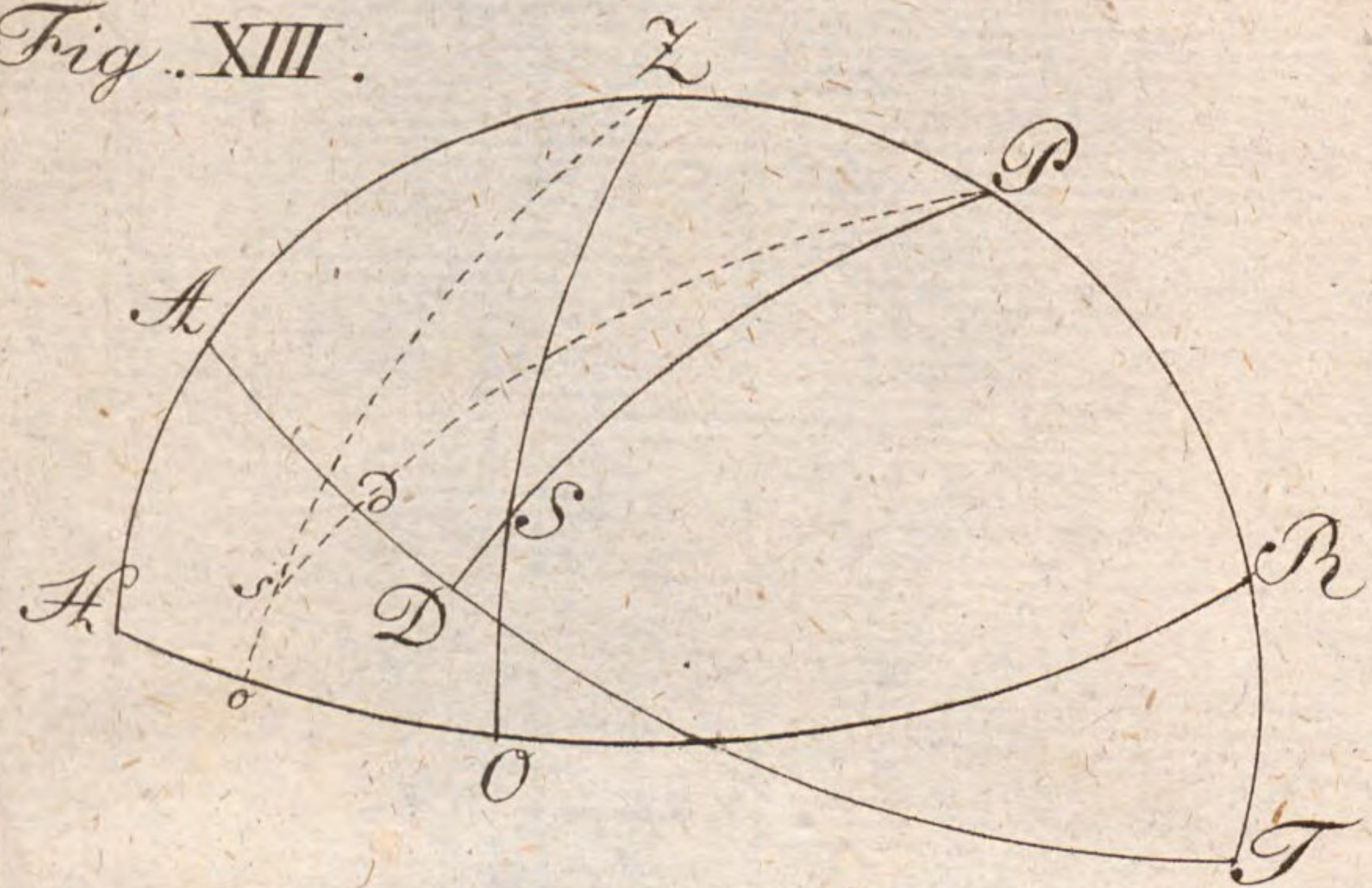


Fig. XVI.

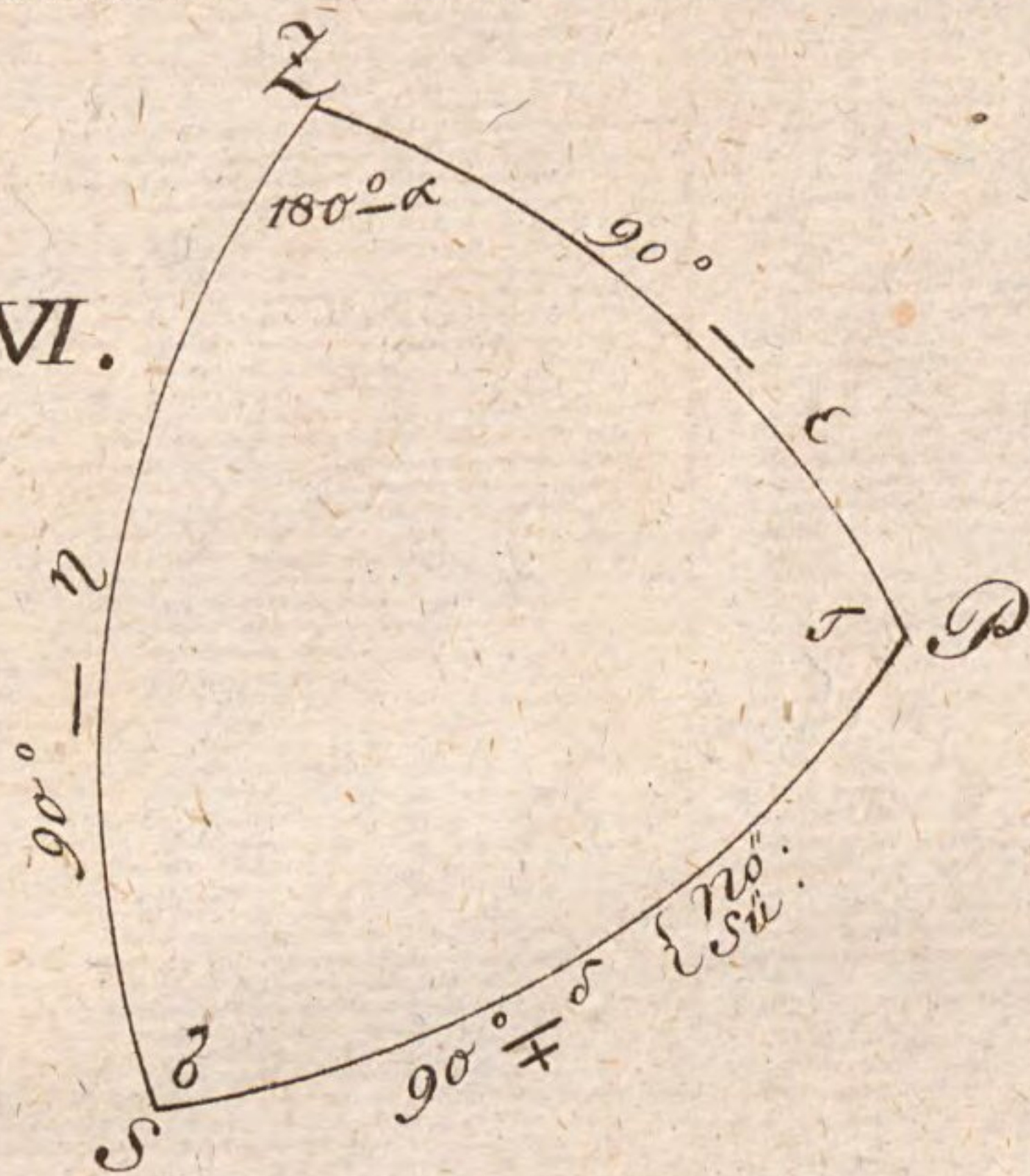


Fig. XIX.

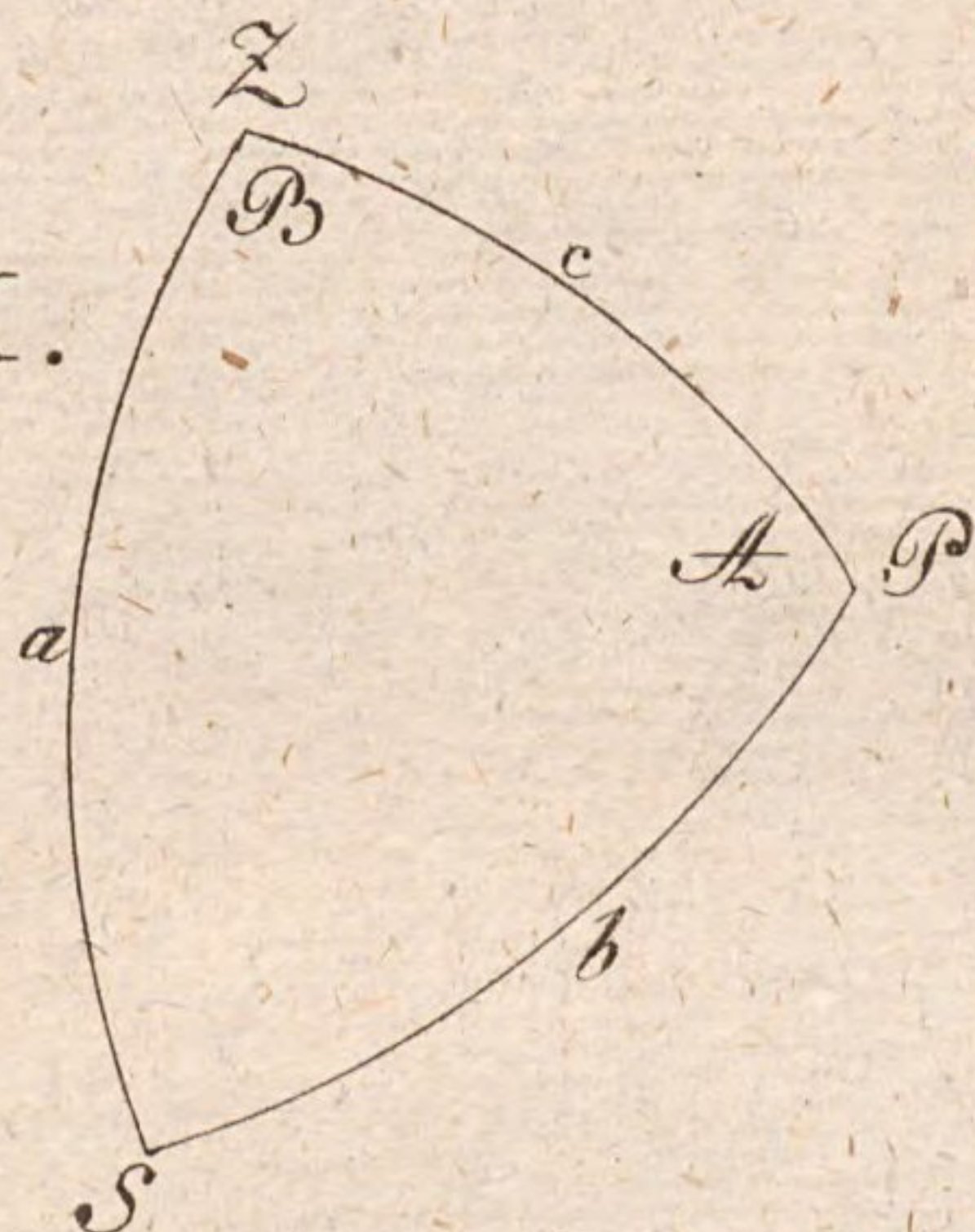


Fig. XIV.

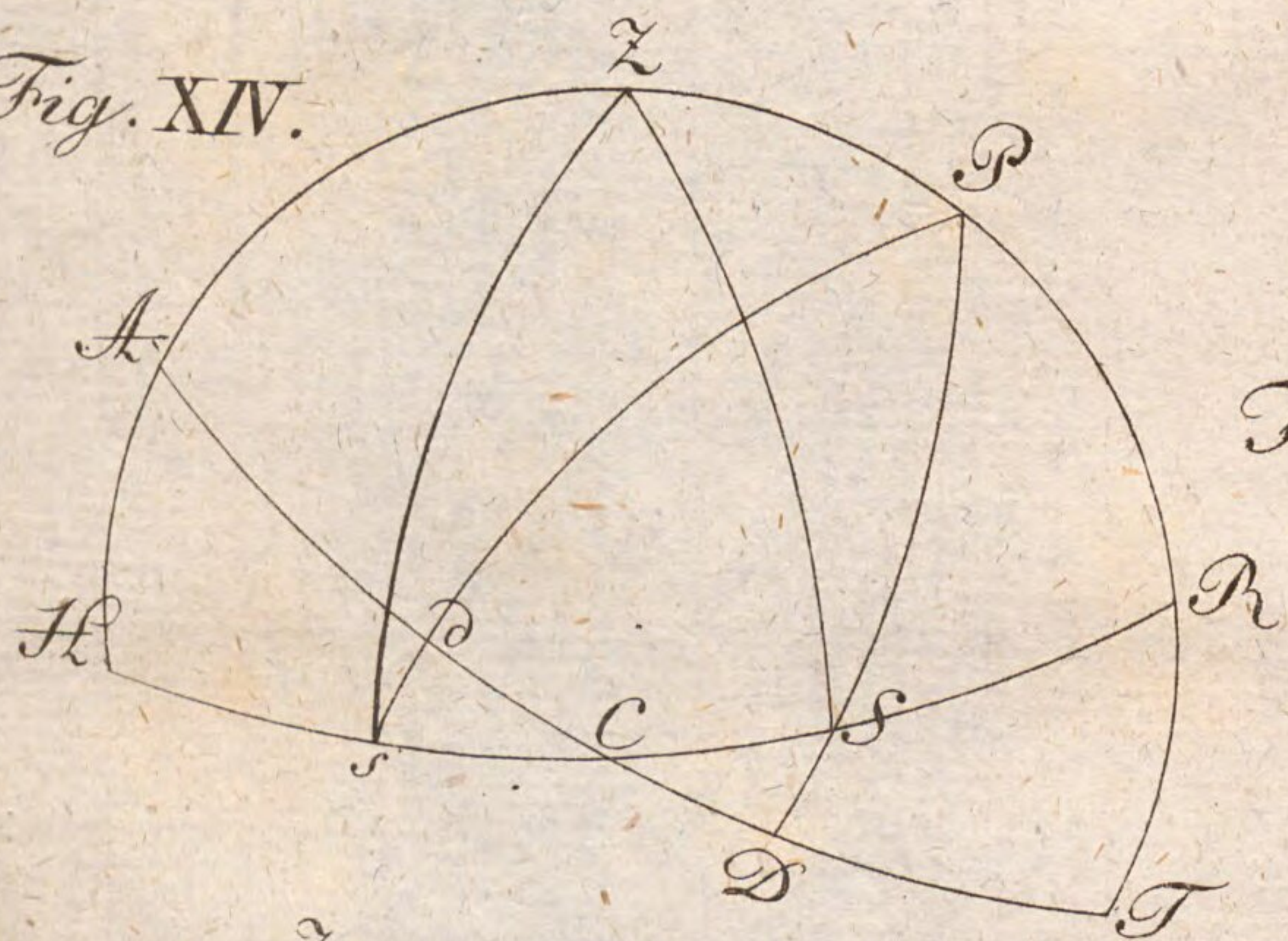


Fig. XVII.



Fig. XX

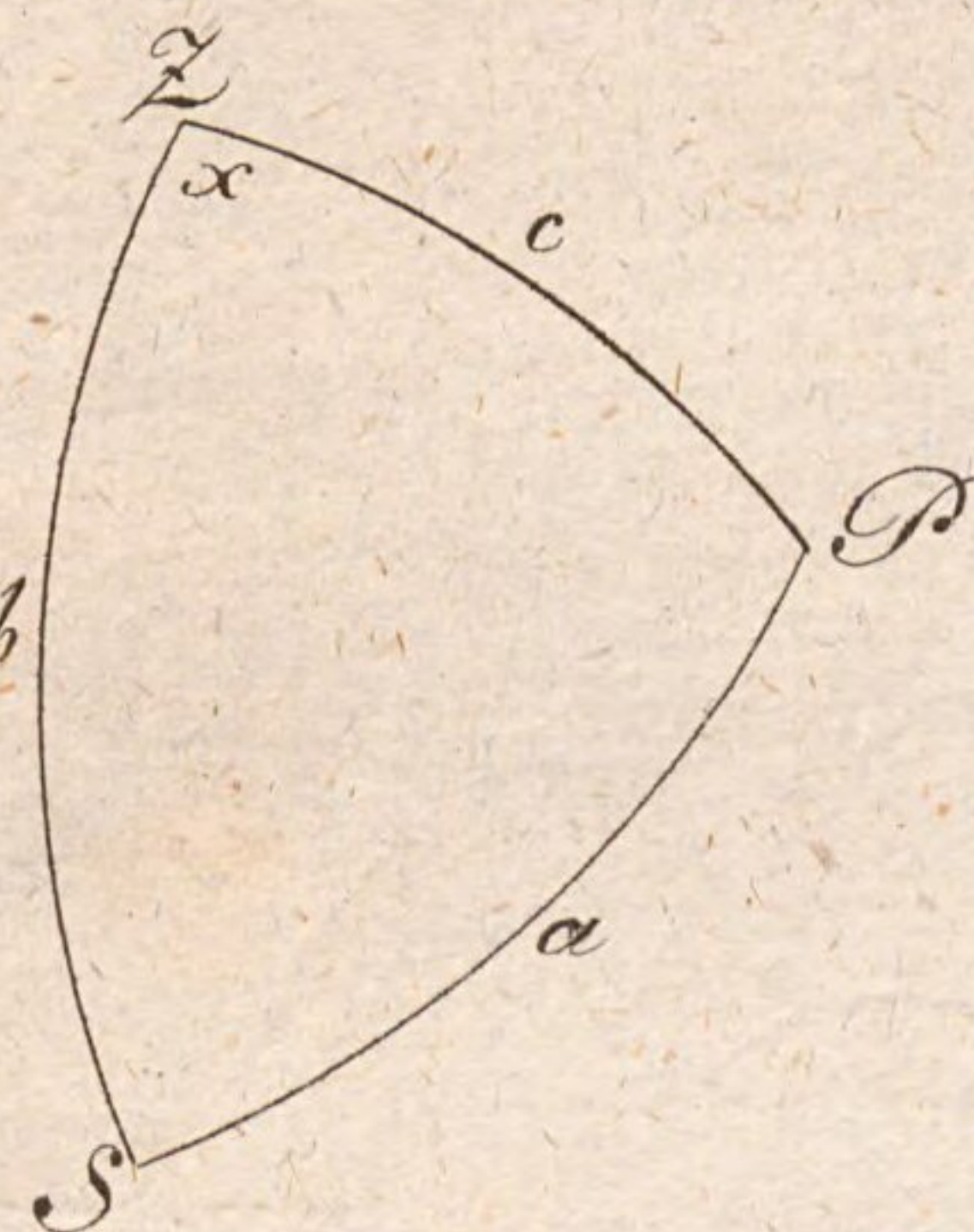


Fig. XV.

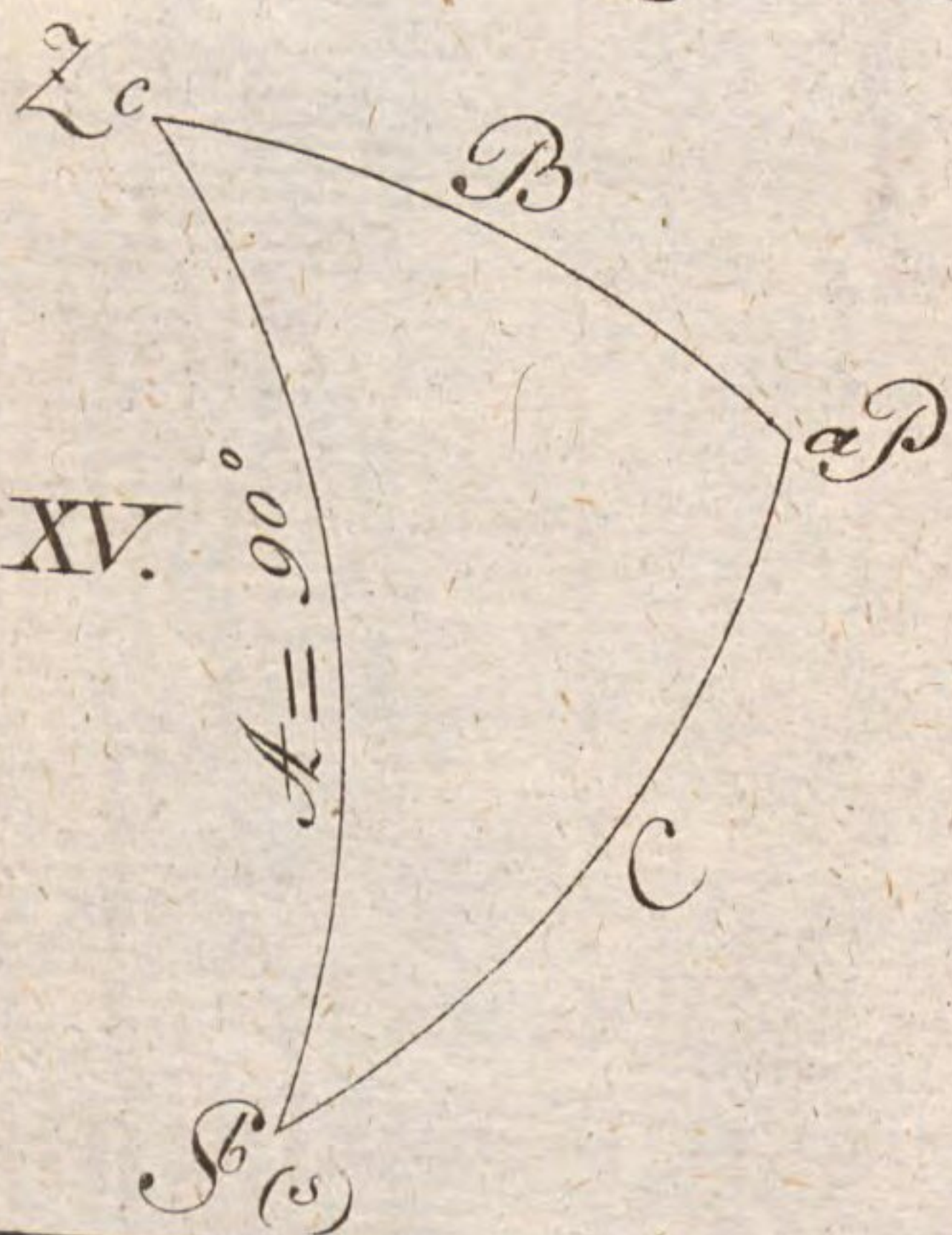
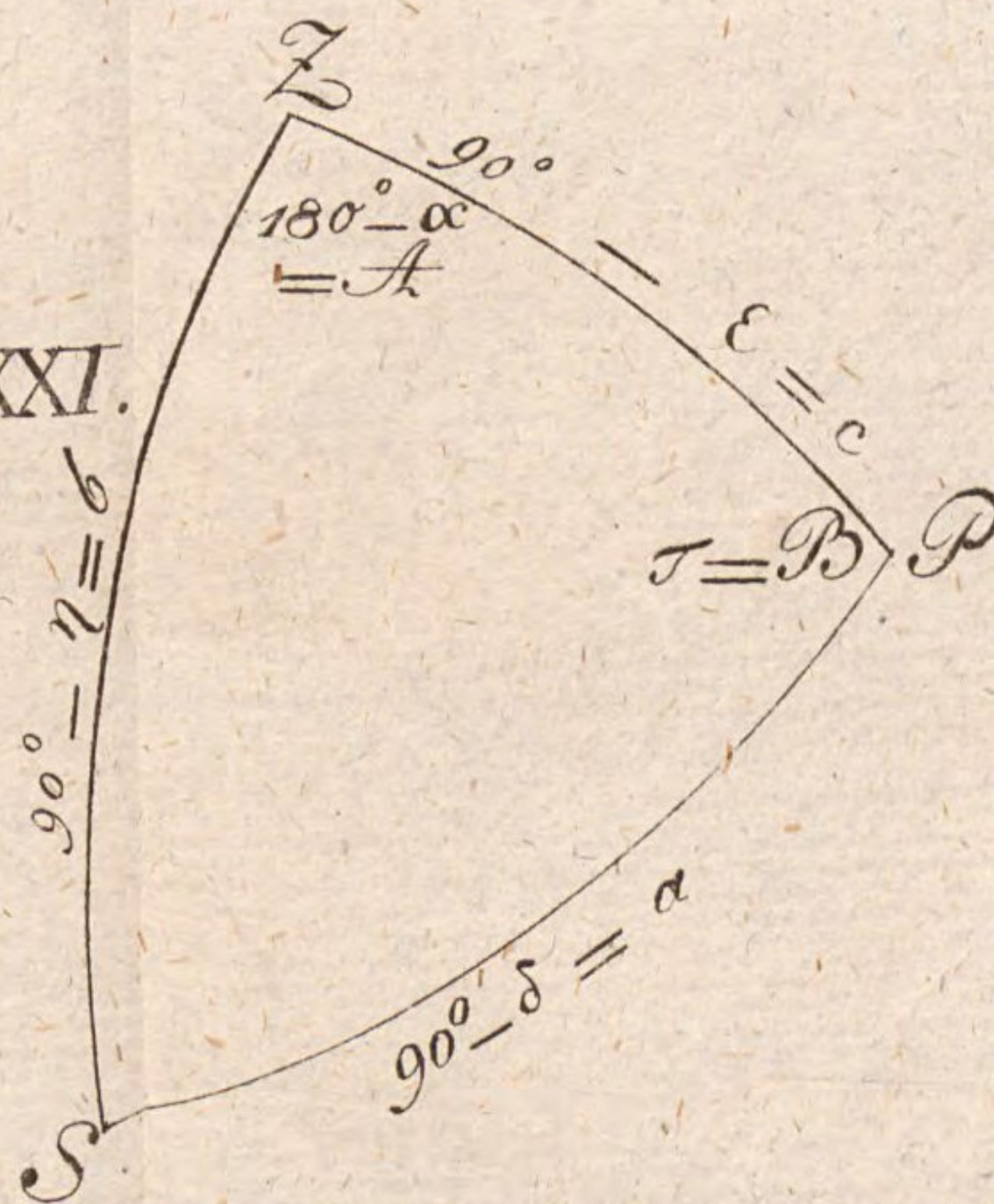


Fig. XVIII.



Fig. XXI.



Rüdiger, Christian Friedrich,

Handbuch der rechnenden Astronomie

Bd.: 2

Leipzig 1802

Astr.u. 149-1/2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10061108-2